高等教育数学课程改革创新系列教材

线性代数自考考点分析与训练

主　编　韩兆君　李高尚　刘　婧
副主编　郭立娜　徐玉国　李　奎　韩洪文

電子工業出版社
Publishing House of Electronics Industry
北京・BEIJING

内 容 简 介

本书以“倡导自学，鼓励自学，帮助自学，推动自学”为原则，依据全国高等教育自学考试《线性代数（经管类）》考试大纲编写。

本书内容包括：行列式、矩阵、向量空间、线性方程组、特征值与特征向量和二次型，特点在于将教材中的考核知识点分块总结，由浅入深；同时为方便自学选取典型例题，每个知识点的后面还配有同步练习和参考答案。另外，本书附带了 2012—2017 年的真题和参考答案。

本书依据真题，考核知识点分题型总结到位，叙述清楚，习题丰富，针对性强，可作为《线性代数（经管类）》自考生的辅导教材或自学用书。

图书在版编目（CIP）数据

线性代数自考考点分析与训练 / 韩兆君，李高尚，刘婧主编. —北京：电子工业出版社，2018.3

ISBN 978-7-121-33064-3

Ⅰ. ①线… Ⅱ. ①韩… ②李… ③刘… Ⅲ. ①线性代数－成人高等教育－自学参考资料 Ⅳ. ①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2017）第 286134 号

策划编辑：朱怀永
责任编辑：裴　杰
印　　刷：
装　　订：
出版发行：电子工业出版社
　　　　　北京市海淀区万寿路 173 信箱　　邮编　100036
开　　本：787×980　1/16　印张：14.75　字数：377.6 千字
版　　次：2018 年 3 月第 1 版
印　　次：2018 年 3 月第 1 次印刷
定　　价：38.80 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题，请向购买书店调换。若书店售缺，请与本社发行部联系，联系及邮购电话：（010）88254888，88258888。

质量投诉请发邮件至zlts@phei.com.cn，盗版侵权举报请发邮件至dbqq@phei.com.cn。

本书咨询联系方式：（010）88254608，zhuhy@phei.com.cn。

前言

线性代数（经管类）是高等教育自学考试所有科目中最难的课程之一，参加自学考试的学生由于缺乏必要的辅导，在学习与考试中遇到不少困难，甚至很多同学因这一门课程屡试不过而无法毕业。

线性代数（经管类），除具有数学学科的严密性和逻辑性之外，又特别具有研究方法的特殊性。要学好这门课，必须对该课程理论有深刻的理解，同时还要理论联系实际，做好相应训练。因此，为帮助考生更有效地掌握好线性代数（经管类）这门课程，我们精心编写了这本书。

本书的编排从“ 帮助考生 ”这一主导思想出发，旨在能让广大读者，形成自学能力，提高学习效率，顺利通过国家统一考试。在考点分析部分，按章排列，每章内按照知识点展开叙述。对每个知识点，由考核要求、考点内容、典型例题、同步练习和参考答案四部分构成, 其中所有例题及练习题都来源于历年真题, 代表性强，讲解清晰，步骤详细，便于读者把握知识重难点，掌握知识，进行针对性的学习。最后，本书还为广大自考生提供了 2012—2017 年真题和参考答案的详解过程，适合广大读者独立学习，也可作为自学考试的辅导教材和考试用书。

本书是烟台南山学院数理部教师多年的教学经验总结，编写中，韩兆君老师主要负责本书的编写、策划和审定工作，李高尚老师负责编写第 1～第 4 章，郭立娜老师负责编写第 5 和第 6 章，刘婧老师负责整理真题，教研室其余老师协助本书完成编写工作。

由于时间紧张，本书在编写和整理过程中难免存在不完善之处，恳请各位读者在使用本书的过程中积极提出修改意见和建议，我们将不胜感激。

祝每一位读者自学成功！

韩兆君

目录

第一部分　考点分析与训练

第 1 章　行　列　式

【考核要求】

学习本章，要确切知道行列式的定义；理解行列式的性质；熟练掌握行列式的计算方法（特别是低阶的数字行列式和具有特殊形状的文字或数字行列式），会计算简单的行列式；理解克拉默法则在线性方程组求解理论中的重要性.

本章的重点：行列式的性质与计算.

难点：n 阶行列式的计算.

考点 1　行列式的对角线法

【考点内容】

1．二阶行列式的对角线法公式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

2．三阶行列式的对角线法公式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

【典型例题】

【例 1-1】设 $f(x)=\begin{vmatrix} 2-x & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$，则方程 $f(x)=0$ 的根是________.

解：因为 $\begin{vmatrix} 2-x & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=2-x+3=5-x=0$，所以 $x=5$.

【例 1-2】3 阶行列式$\begin{vmatrix}1&0&0\\2&2&5\\3&1&3\end{vmatrix}=$__________.

解：由公式得，$\begin{vmatrix}1&0&0\\2&2&5\\3&1&3\end{vmatrix}=6+0+0-0-0-5=1$.

【同步练习及参考答案】

1．行列式$\begin{vmatrix}0&1\\1&2\end{vmatrix}$的值为_______________.

2．若$\begin{vmatrix}k&1\\1&2\end{vmatrix}=0$，则 $k=$_____________.

3．已知行列式$\begin{vmatrix}a&2&1\\2&3&0\\1&-1&1\end{vmatrix}=0$，则数 $a=$___________.

4．若$\begin{vmatrix}2&1&0\\1&3&1\\k&2&1\end{vmatrix}=0$，则$k=$_______________.

5．3 阶行列式$\begin{vmatrix}2&1&0\\1&2&1\\0&1&2\end{vmatrix}=$__________.

参考答案

1．-1　　2．$\frac{1}{2}$　　3．3　　4．-1　　5．4

考点 2　余子式与代数余子式

【考点内容】

1．n 阶行列式$|a_{ij}|$中元素 a_{ij} 的余子式 M_{ij}

$$M_{ij}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix};$$

2．元素 a_{ij} 的代数余子式 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$，与余子式 M_{ij} 只是一个符号区别

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}=\begin{cases} M_{ij}, & i+j=2k, \\ -M_{ij}, & i+j=2k+1. \end{cases}(k\in N^{+}).$$

【典型例题】

【例 1-3】阶行列式 $|a_{ij}|=\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ 中元素 a_{21} 的余了式 $M_{21}=$_____，代数余子式 $A_{21}=$_____.

解：由公式 $M_{21}=\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=-1$，从而 $A_{21}=(-1)^{2+1}M_{21}=1$.

【同步练习及参考答案】

1．行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ 中 a_{22} 的代数余子式为（　　）.

A. $\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$　　B. $-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$　　C. $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$　　D. $-\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$

2．行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \end{vmatrix}$ 中（3，2）元素的代数余子式 $A_{32}=$____________.

3．行列式 $\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$ 第二行第一列元素的代数余子式 $A_{21}=$__________.

4．已知 3 阶行列式 $|a_{ij}|=\begin{vmatrix} 1 & x & 3 \\ x & 2 & 0 \\ 5 & -1 & 4 \end{vmatrix}$ 中元素 a_{12} 的代数余子式 A_{12}=8，求元素 a_{21} 的代数

余子式 A_{21} 的值.

参考答案

1．C　　2．-2　　3．-1　　4．5

考点 3　行列式的展开法

【考点内容】

1．**定理 1.2.1**　n 阶行列式 $D=|a_{ij}|_n$ 等于它的**任意一行（列）**的各元素与其对应的代数余子式的乘积的和，即

$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}=(-1)^{i+1}a_{i1}M_{i1}+(-1)^{i+2}a_{i2}M_{i2}+\cdots+(-1)^{i+n}a_{in}M_{in}$，按第 i 行展开

或　$\updownarrow$：代数余子式形式　　　$\updownarrow$：余子式形式

$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}=(-1)^{1+j}a_{1j}M_{1j}+(-1)^{2+j}a_{2j}M_{2j}+\cdots+(-1)^{n+j}a_{nj}M_{nj}$，按第 j 列展开

其中 $i, j=1, 2, 3, \cdots, n$.

2．三角行列式

上三角行列式　　下三角行列式　　对角行列式

$$\begin{vmatrix} a_1 & * & * & * \\ & a_2 & * & * \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_n \end{vmatrix}=a_1a_2\cdots a_n \quad \begin{vmatrix} a_1 & & & \\ * & a_2 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ * & * & * & a_n \end{vmatrix}=a_1a_2\cdots a_n \quad \begin{vmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{vmatrix}=a_1a_2\cdots a_n$$

注意：三角行列式考虑的是以主对角线为斜边，且由非零元素构成的等腰直角三角形在主对角线的上方还是下方，元素为 0 时可以省略不写．若在上方是上三角，在下方是下三角．**其结果都等于主对角线上元素的乘积**（上三角行列式始终按第 1 列展开，下三角行列式始终按第 1 行展开）.

【典型例题】

【例 1-4】按第 1 列展开得行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & n-1 \\ n & & & & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{n+1} n \begin{vmatrix} 1 & & & \\ & 2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & n-1 \end{vmatrix} = (-1)^{n+1} n!$$

注意：为了能快捷地求出行列式值，**要按零最多的行或列来展开计算（因为只有这样求解的行列式个数才能最少，否则可能会成倍增加），同时尽量保证展开后的余子式为三角行列式**，这也体现了三角行列式的用途.

【例 1-5】 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{2+2}(-1)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -(0-6+2-0-6-2) = 12$.

【同步练习及参考答案】

1．设 3 阶行列式 D_3 的第 2 列元素分别为 1,-2,3，对应的代数余子式分别为-3,2,1，则 D_3=____.

2．3 阶行列式 $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ 第 3 行元素的代数余子式之和 $A_{31}+A_{32}+A_{33}$=________.

3．计算行列式 $\begin{vmatrix} 3 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 10 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 & 3 \end{vmatrix}$=________.

4．4 阶行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$=________.

5．5 阶行列式 $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$=________.

6．4 阶行列式 $\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & x & -1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}=$________.

7．4 阶行列式 $\begin{vmatrix} a_2 & 0 & 0 & c_2 \\ 0 & a_1 & c_1 & 0 \\ 0 & d_1 & b_1 & 0 \\ d_2 & 0 & 0 & b_2 \end{vmatrix}=$________.

8．6 阶行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=$________.

参考答案

1．-4　2．-7　3．-180　4．-15　5．24　6．$a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$
7．$(a_1b_1-c_1d_1)(a_2b_2-c_2d_2)$　8．18

考点 4　行列式的性质与应用

【考点内容】

1．行列式的性质

性质 1　行列式与它的转置行列式相等，即 $D=D^{\mathrm{T}}$.

性质 2　用数 k 乘行列式 D 中某一行（列）的所有元素所得的行列式等于 kD．即，行列式可以按行（列）逐次的提出公因数.

性质 3　互换行列式的任意两行（列），行列式的值改变符号.

性质 4　若行列式中有两行（列）的对应元素成比例，则此行列式的值等于零.

性质 5　行列式可以按行（列）拆开.

性质 6　把行列式 D 的某一行的所有元素都乘以同一个数以后加到另一行的对应元素上去，所得的行列式仍为 D（其值不变）.

相对来说，性质 2、3、6 较为重要.

2．**任意一个奇数阶的反对称行列式，其值必为零.**

以三阶行列式为例

$$\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix}0 & -b & -c\\ b & 0 & -e\\ c & e & 0\end{vmatrix}=(-1)^3\begin{vmatrix}0 & b & c\\ -b & 0 & e\\ -c & -e & 0\end{vmatrix}=-\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{D},$$

因为将它的每一行都提取公因数(-1)后，恰好都是它的转置行列式，由此根据性质 1 可得，$\boldsymbol{D}=-\boldsymbol{D}$，从而有 $\boldsymbol{D}=0$.

3．**定理 1.3.1** n 阶行列式 $\boldsymbol{D}=|a_{ij}|_n$ 的任意一行（列）的各元素与另一行（列）对应元素的代数余子式的乘积之和等于零，即

$$a_{i1}A_{k1}+a_{i2}A_{k2}+\cdots+a_{in}A_{kn}=0\ (i\neq k),$$

或

$$a_{1j}A_{1s}+a_{2j}A_{2s}+\cdots+a_{nj}A_{ns}=0\ (j\neq s).$$

【典型例题】

【例 1-6】设行列式$\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}$=1，$\begin{vmatrix}a_1 & c_1\\ a_2 & c_2\end{vmatrix}$=2，则$\begin{vmatrix}a_1 & b_1+c_1\\ a_2 & b_2+c_2\end{vmatrix}$=（　　）.

A. -3　　B. -1　　C. 1　　D. 3

解：选 D．利用性质 5，$\begin{vmatrix}a_1 & b_1+c_1\\ a_2 & b_2+c_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_1 & c_1\\ a_2 & c_2\end{vmatrix}=1+2=3$.

【例 1-7】设行列式$\begin{vmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22}\end{vmatrix}=3$，则行列式$\begin{vmatrix}\alpha_{11} & 2\alpha_{12}+5\alpha_{11}\\ \alpha_{21} & 2\alpha_{22}+5\alpha_{21}\end{vmatrix}$=（　　）.

A. -15　　B. -6　　C. 6　　D. 15

解：选 C．利用性质 6，将第 1 列的 -5 倍加到第 2 列得$\begin{vmatrix}\alpha_{11} & 2\alpha_{12}\\ \alpha_{21} & 2\alpha_{22}\end{vmatrix}$，再利用性质 2，按第 2 列提取公因数，得原行列式值为 6.

【例 1-8】设行列式$\begin{vmatrix}1 & 2 & 5\\ 1 & 3 & -2\\ 2 & 5 & a\end{vmatrix}$=0，则 a =____________.

解：先利用性质 6 将第 1 行加到第 2 行得$\begin{vmatrix}1 & 2 & 5\\ 2 & 5 & 3\\ 2 & 5 & a\end{vmatrix}$，再由性质 4 得，$a=3$.

【例 1-9】行列式$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & -2 & 2 \end{vmatrix}$中第 4 行各元素的代数余子式之和为____________.

解：因为 $A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}$ 是该行列式的第 2 行元素与第 4 行元素对应的代数余子式的乘积之和，所以由定理 1.3.1 可知，结果为 0.

【同步练习及参考答案】

一、单项选择题

1. 设行列式$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=1$，$\begin{vmatrix} a_1 & -c_1 \\ a_2 & -c_2 \end{vmatrix}=-1$，则行列式$\begin{vmatrix} a_1 & b_1-c_1 \\ a_2 & b_2-c_2 \end{vmatrix}=$（　　）.

   A. -1　　B. 0　　C. 1　　D. 2

2. 已知 2 阶行列式$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}=m$，$\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}=n$，则$\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ a_1+c_1 & a_2+c_2 \end{vmatrix}=$（　　）.

   A. $m-n$　　B. $n-m$　　C. $m+n$　　D. $-(m+n)$

3. 设行列式 $\boldsymbol{D}_1=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$，$\boldsymbol{D}_2=\begin{vmatrix} a_1 & 2b_1-3a_1 \\ a_2 & 2b_2-3a_2 \end{vmatrix}$，则 $\boldsymbol{D}_2=$（　　）.

   A. $-\boldsymbol{D}_1$　　B. $\boldsymbol{D}_1$　　C. $2\boldsymbol{D}_1$　　D. $3\boldsymbol{D}_1$

4. 3 阶行列式$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$的值为（　　）.

   A. -1　　B. 0　　C. 1　　D. 2

5. 已知$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=3$，那么$\begin{vmatrix} 2a_{11} & 2a_{12} & 2a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ -2a_{31} & -2a_{32} & -2a_{33} \end{vmatrix}=$（　　）.

   A. -24　　B. -12　　C. -6　　D. 12

6. 设行列式$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 4 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=1$，则行列式$\begin{vmatrix} 2x & 2y & 2z \\ \frac{4}{3} & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=$（　　）.

   A. $\frac{2}{3}$　　B. 1　　C. 2　　D. $\frac{8}{3}$

7．设行列式$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 4$，则行列式$\begin{vmatrix} 2a_{11} & 2a_{12} & 2a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 3a_{31} & 3a_{32} & 3a_{33} \end{vmatrix} =$（　　）．

A．12　　B．24　　C．36　　D．48

8．设行列式$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 2$，则$\begin{vmatrix} 3a_{11} & 3a_{12} & 3a_{13} \\ -a_{31} & -a_{32} & -a_{33} \\ a_{21}-a_{31} & a_{22}-a_{32} & a_{23}-a_{33} \end{vmatrix} =$（　　）．

A．–6　　B．–3　　C．3　　D．6

9．设行列式$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =2$，则$\begin{vmatrix} -a_{11} & 2a_{12} & -3a_{13} \\ -a_{21} & 2a_{22} & -3a_{23} \\ -a_{31} & 2a_{32} & -3a_{33} \end{vmatrix} =$（　　）．

A．-12　　B．-6　　C．6　　D．12

10．设行列式$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =1$，则$\begin{vmatrix} 3a_{11}-4a_{12} & 2a_{11} & a_{13} \\ 3a_{21}-4a_{22} & 2a_{21} & a_{23} \\ 3a_{31}-4a_{32} & 2a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} =$（　　）．

A．-8　　B．-6　　C．6　　D．8

11．设行列式$\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =3$，$\boldsymbol{D}_1=\begin{vmatrix} a_{11} & 5a_{11}+2a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & 5a_{21}+2a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & 5a_{31}+2a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$，则$\boldsymbol{D}_1$的值为（　　）．

A．-15　　B．-6　　C．6　　D．15

二、填空题

1．已知行列式$\begin{vmatrix} a & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$，则数$a =$__________．

2．设行列式$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 5 & a \end{vmatrix} =0$，则数$a =$____________．

3．若$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ k & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$，则$k =$_____________．

4．若 3 阶行列式$\begin{vmatrix} 1 & 6 & 8 \\ 0 & k & 2 \\ 0 & 2 & k \end{vmatrix} = 0$且$k > 0$，则参数$k=$___________．

5．行列式$\begin{vmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix}=$__________.

6．若$a_ib_i \neq 0, i=1,2,3$，则行列式$\begin{vmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 \\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 \end{vmatrix}=$__________.

7．已知3阶行列式$\begin{vmatrix} a_{11} & 2a_{12} & 3a_{13} \\ 2a_{21} & 4a_{22} & 6a_{23} \\ 3a_{31} & 6a_{32} & 9a_{33} \end{vmatrix}=6$，则$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=$__________.

8．已知行列式$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=3$，则$\begin{vmatrix} a_1 & 2b_1+c_1 & c_1 \\ a_2 & 2b_2+c_1 & c_2 \\ a_3 & 2b_3+c_1 & c_3 \end{vmatrix}=$__________.

9．设行列式$D=\begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 2 \\ 5 & 3 & -2 \end{vmatrix}$，其第3行各元素的代数余子式之和为__________.

参考答案

一、单项选择题

1．B　2．B　3．C　4．A　5．B　6．A　7．B　8．D　9．D　10．D　11．C

二、填空题

1．3　2．3　3．-1　4．2　5．0　6．0　7．$\frac{1}{6}$　8．6　9．0

考点5　行列式的计算

【考点内容】

1．初等变换法

利用行列式的性质2、3、6将其化为三角行列式，其值就等于三角行列式主对角线上的元素及其系数的乘积.

（1）用于求解所有行或所有列的元素构成都相同的情况：是指按行考虑或按列考虑两者有一种成立即可，并不是两者同时满足．如下面行列式，只能考虑后面三列加到第

一列.

（2）用于求解行（列）元素按逻辑关系排列的行列式：先用性质 6 将行（列）元素变小（能化为多小就化多小），若出现两行（列）元素成比例，则结果为 0；否则，再考虑其他方法求解.

2．性质 6 和展开法的结合使用

先选出含零最多且最简单的一行或列，利用性质 6 将该行或列化为只有一个元素非零，再按该行或列展开，行列式的阶数将降低一阶．反复运用，即可将任意 n 阶的行列式最终展开为一个二阶行列式，得出结果.

在求解四阶及其以上的纯数字行列式时，建议使用该方法．遇到含字母和数字的行列式时，只能用数字将字母化为 0．这样，既避免了出现分数，也考虑了字母为 0 的情况.

在运用初等变换法求解所有行或所有列的元素构成都相同的情况时，若运用性质 6 不易化为三角行列式时，可考虑用性质 6 和展开法结合使用的方法继续求解．具体求解步骤如下：

第 1 步：先看所有行或所有列的元素构成是否要相同？若相同，用性质 6 将后面的三行（列）全部加到第一行（列）上，让第一行（列）的元素都一样；若不符合，直接跳到第 3 步；

第 2 步：按第一行（列）提取公因数；

第 3 步：选出含零最多且最简单的一行或列，利用性质 6 将该行或列化为只有一个元素非零；

第 4 步：按该行或列展开，行列式的阶数将为 3 阶；

第 5 步：再选出含零最多且最简单的一行或列，利用性质 6 将该行或列化为只有一个元素非零；

第 6 步：按该行或列展开，行列式的阶数将为 2 阶；

第 7 步：计算该 2 阶行列式，得出结果.

3．范德蒙德行列式

二阶的：$V_2=\begin{vmatrix}1 & 1\\ x_1 & x_2\end{vmatrix}$或$\begin{vmatrix}1 & x_1\\ 1 & x_2\end{vmatrix}$，结果 $V_2=x_2-x_1$ ；

三阶的：$V_3=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ x_1 & x_2 & x_3\\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2\end{vmatrix}$或$\begin{vmatrix}1 & x_1 & x_1^2\\ 1 & x_2 & x_2^2\\ 1 & x_3 & x_3^2\end{vmatrix}$，结果 $V_3=(x_2-x_1)(x_3-x_1)(x_3-x_2)$ ；

$$V_3=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ x_1 & x_2 & x_3\\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & x_2-x_1 & x_3-x_1\\ 0 & x_2^2-x_1^2 & x_3^2-x_1^2\end{vmatrix}=(x_2-x_1)(x_3-x_1)\begin{vmatrix}1 & 1\\ x_2 & x_3\end{vmatrix}=(x_2-x_1)(x_3-x_1)(x_3-x_2).$$

四阶的：$V_4=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\x_1&x_2&x_3&x_4\\x_1^2&x_2^2&x_3^2&x_4^2\\x_1^3&x_2^3&x_3^3&x_4^3\end{vmatrix}$ 或 $\begin{vmatrix}1&x_1&x_1^2&x_1^3\\1&x_2&x_2^2&x_2^3\\1&x_3&x_3^2&x_3^3\\1&x_4&x_4^2&x_4^3\end{vmatrix}$，结果

$$V_4=(x_2-x_1)(x_3-x_1)(x_4-x_1)(x_3-x_2)(x_4-x_2)(x_4-x_3)=\prod_{1\le i<j\le 4}(x_j-x_i).$$

注意：范德蒙德行列式的结果可作为公式记住，考试时可直接套用.

【典型例题】

【例 1-10】

$$\begin{vmatrix}x+1&-1&1&-1\\1&x-1&1&-1\\1&-1&x+1&-1\\1&-1&1&x-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x&-1&1&-1\\x&x-1&1&-1\\x&-1&x+1&-1\\x&-1&1&x-1\end{vmatrix}=x\begin{vmatrix}1&-1&1&-1\\1&x-1&1&-1\\1&-1&x+1&-1\\1&-1&1&x-1\end{vmatrix}=x\begin{vmatrix}1&-1&1&-1\\0&x&0&0\\0&0&x&0\\0&0&0&x\end{vmatrix}=x^4.$$

【例 1-11】

$$\begin{vmatrix}2&3&4&5\\3&4&5&6\\4&5&6&7\\5&6&7&8\end{vmatrix}\overset{\substack{②+①\times(-1)\\③+②\times(-1)\\④+③\times(-1)}}{=\!=\!=}\begin{vmatrix}2&3&4&5\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{vmatrix}=0.$$

【例 1-12】

$$\begin{vmatrix}a&1&0&0\\-1&b&1&0\\0&-1&c&1\\0&0&-1&d\end{vmatrix}\overset{①+②\times(a)}{=\!=\!=}\begin{vmatrix}0&1+ab&a&0\\-1&b&1&0\\0&-1&c&1\\0&0&-1&d\end{vmatrix}=-1\times(-1)^{2+1}\times\begin{vmatrix}1+ab&a&0\\-1&c&1\\0&-1&d\end{vmatrix}=(1+ab)(cd+1)+ad.$$

【同步练习及参考答案】

计算下列行列式

1. $\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&4&9\end{vmatrix}$.

2. $\begin{vmatrix}1&1&1\\2&4&6\\4&16&36\end{vmatrix}$.

3. $\begin{vmatrix}a&b&c\\a^2&b^2&c^2\\a+a^3&b+b^3&c+c^3\end{vmatrix}$.

4. $\begin{vmatrix}0&1&1&1\\1&0&1&1\\1&1&0&1\\1&1&1&0\end{vmatrix}$.

5. $\begin{vmatrix}5&3&3&3\\3&5&3&3\\3&3&5&3\\3&3&3&5\end{vmatrix}$.

6. $\begin{vmatrix}a+b&a&b\\a&a+b&b\\a&b&a+b\end{vmatrix}$.

7. $\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-a-c & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$.

8. $\begin{vmatrix} x-1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & x+1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & x-1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & x+1 \end{vmatrix}$.

9. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

10. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ -1 & 1 & 0 & b \\ 0 & -1 & 1 & c \\ 0 & 0 & -1 & d \end{vmatrix}$.

11. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{vmatrix}$.

12. $\begin{vmatrix} 1 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 2^2 & 3^2 & 4^2 & 5^2 \\ 3^2 & 4^2 & 5^2 & 6^2 \\ 4^2 & 5^2 & 6^2 & 7^2 \end{vmatrix}$.

13. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & -4 & 1 \\ 2 & 4 & -6 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \end{vmatrix}$.

14. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$.

15. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

16. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

17. $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$.

18. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & -3 & 4 \end{vmatrix}$.

19. $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 2 & -2 \\ 7 & 6 & -2 & 2 \end{vmatrix}$.

20. $\begin{vmatrix} 3 & 5 & -1 & 2 \\ -4 & 5 & 3 & -3 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -3 & 4 \end{vmatrix}$.

21. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \end{vmatrix}$.

22. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{vmatrix}$.

23. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix}$.

24. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

25. $\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & x & -1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}$.

参考答案

1．2　2．16　3．$abc(b-a)(c-a)(c-b)$　4．-3　5．112

6．$2ab(a+b)$　7．$(a+b+c)^3$　8．x^4　9．5

10．$a+b+c+d$　11．0　12．0　13．57　14．-2　15．9

16．6　17．55　18．192　19．-96　20．48　21．74

22．-80　23．-24　24．160　　25．$a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$

考点 6　克拉默法则

【考点内容】

1．**定理 1.4.2** 如果 n 个方程的 n 元线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n, \end{cases}$ 的系数行列式 $D=|a_{ij}|_n\neq 0$，则方程组必有唯一解：

$$x_j=\frac{D_j}{D},\quad j=1,2,\cdots,n,$$

其中

$$D_j=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{i,j-1} & b_i & a_{i,j+1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},\quad j=1,2,\cdots,n,$$

是将系数行列式 D 中第 j 列元素 $a_{1j},a_{2j},\cdots,a_{nj}$ 对应地换为方程组的常数项 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 得到的行列式.

注意：只适应求解系数行列式不为零的 n 个方程 n 个未知量的非齐次线性方程组(方程个数与未知量个数相同的方程组)，克拉默法则公式记住后，关键还是行列式的计算.

2．n 个方程 n 个未知量的齐次线性方程组解的结论

如果 n 个方程的 n 元线性方程组有非零解(至少有一个未知量的取值不是零的解)，则它的系数行列式 $D=|a_{ij}|_n=0$.

下面直接给出 n 个方程 n 个未知量的齐次线性方程组解的结论

n 个方程 n 个未知量的齐次线性方程组只有零解	$\Leftrightarrow$	它的系数行列式 $D=|a_{ij}|_n\neq 0$
n 个方程 n 个未知量的齐次线性方程组有非零解	$\Leftrightarrow$	它的系数行列式 $D=|a_{ij}|_n=0$

注意：这两个结论都是充分必要的，利用它们可以判定 n 个方程 n 个未知量的齐次线性方程组解的情况；或根据解的情况，能确定出其系数行列式是否等于零.

【典型例题】

【例 1-13】求解方程组$\begin{cases} x_1+x_2-2x_3=-3, \\ 5x_1-2x_2+7x_3=22, \\ 2x_1-5x_2+4x_3=4. \end{cases}$

解：求解下列行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 5 & -2 & 7 \\ 2 & -5 & 4 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & -7 & 17 \\ 2 & -7 & 8 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -7 & 17 \\ -7 & 8 \end{vmatrix}=63,$$

$$D_1=\begin{vmatrix} -3 & 1 & -2 \\ 22 & -2 & 7 \\ 4 & -5 & 4 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 16 & -2 & 3 \\ -11 & -5 & -6 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 16 & 3 \\ -11 & -6 \end{vmatrix}=63,$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 5 & 22 & 7 \\ 2 & 4 & 4 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 37 & 17 \\ 2 & 10 & 8 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 37 & 17 \\ 10 & 8 \end{vmatrix}=126,$$

$$D_3=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 5 & -2 & 22 \\ 2 & -5 & 4 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & -7 & 37 \\ 2 & -7 & 10 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -7 & 37 \\ -7 & 10 \end{vmatrix}=189.$$

由于方程组系数行列式$D\neq 0$，根据克拉默法则，得方程组的唯一解：

$$x_1=\frac{D_1}{D}=1,\ x_2=\frac{D_2}{D}=2,\ x_3=\frac{D_3}{D}=3.$$

【例 1-14】如果方程组$\begin{cases} 3x_1+kx_2-x_3=0 \\ 4x_2-x_3=0 \\ 4x_2+kx_3=0 \end{cases}$有非零解，则 k=______________.

解：因为该齐次线性方程组的有非零解，所以其系数行列式为 0．即

$\begin{vmatrix} 3 & k & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 4 & k \end{vmatrix}=0$，由行列式的性质得，$k=-1$.

【同步练习及参考答案】

1．若方程组$\begin{cases} x_1+x_2=0 \\ kx_1-x_2=0 \end{cases}$有非零解，则$k=$______________.

2．设方程组$\begin{cases} x_1+\lambda x_2+x_3=0 \\ \lambda x_1+x_2+x_3=0 \\ x_1+x_2+\lambda x_3=0 \end{cases}$有非零解，且数$\lambda<0$，则$\lambda=$______________.

3．已知 3 元齐次线性方程组$\begin{cases} x_1+x_2-x_3=0 \\ 2x_1+3x_2+ax_3=0 \\ x_1+2x_2+3x_3=0 \end{cases}$有非零解，则$a=$______________.

4．若齐次线性方程组$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=0 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=0 \end{cases}$有非零解，则其系数行列式的值为____________.

5．利用克拉默法则解线性方程组$\begin{cases} x_1+ax_2+a^2x_3=3a^2 \\ x_1+bx_2+b^2x_3=3b^2 \\ x_1+cx_2+c^2x_3=3c^2 \end{cases}$，其中$a,b,c$两两互不相同.

参考答案

1． -1　　2． -2　　3． 2　　4． 0　　5． $x_1=x_2=0,\quad x_3=3$.

第 2 章　矩　　阵

【考核要求】

学习本章, 要求掌握矩阵的各种运算及其运算法则 ;知道方阵可逆的充分必要条件；会求可逆矩阵的逆矩阵；熟练掌握矩阵的初等变换，会用初等行变换法求解矩阵方程；理解矩阵的秩定义，会求矩阵的秩.

本章的重点：矩阵运算及其逆矩阵的求法，矩阵的初等变换，矩阵方程的求解.

难点：逆矩阵的求法及矩阵的秩的概念.

考点 1　矩阵的线性运算

【考点内容】

1．矩阵相等：对应量全部相等，即结果是一样的

$$\boldsymbol{A}_{m\times n}=\boldsymbol{B}k_{\text{x}}l \iff \begin{cases} m=k, \\ n=l, \\ a_{ij}=b_{ij},\ i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n. \end{cases}$$

2．矩阵的加减法：对应位置元素相加减

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$，则 $\boldsymbol{A}\pm\boldsymbol{B}=(a_{ij}\pm b_{ij})_{m\times n}$.

3．矩阵的数乘：每个元素都要与常数 k 相乘

$$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n},\quad k\in R,\ 则\ k\boldsymbol{A}=(ka_{ij})_{m\times n}=\begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix}.$$

【典型例题】

【例 2-1】已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 8 & 3 & 1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 5 & 6 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 7 & -1 \end{pmatrix}$，且 $\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}$，求 $\boldsymbol{X}$.

解：$\boldsymbol{X}=\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A})=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 & 0 \\ 0 & -4 & 4 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

【同步练习及参考答案】

1．若$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&x\\2&1&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&0&2\\4&2&y\end{pmatrix}$，且$2\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$，则（　　）.

A．$x=1$，$y=2$　　B．$x=2$，$y=1$　　C．$x=1$，$y=1$　　D．$x=2$，$y=2$

2．下列等式中，正确的是（　　）.

A．$\begin{pmatrix}2&0&0\\0&4&1\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&1\end{pmatrix}$　　B．$3\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&6&9\\4&5&6\end{pmatrix}$

C．$5\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}=10$　　D．$-\begin{pmatrix}1&2&0\\0&-3&-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&-2&0\\0&3&5\end{pmatrix}$

3．设向量$\boldsymbol{\alpha}=(1,0,1)$，$\boldsymbol{\beta}=(3,5,1)$，则$\boldsymbol{\beta}-2\boldsymbol{\alpha}=$__________.

4．设矩阵$A=\begin{pmatrix}1&2&0\\2&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&1\\0&1&3\end{pmatrix}$，则$A+2B=$____________.

5．设$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-2,5)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(4,7,-2)$，则$-2\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2=$____________.

6．设向量$\boldsymbol{\alpha}=(6,-2,0,4)$，$\boldsymbol{\beta}=(-3,1,5,7)$，向量$\boldsymbol{\gamma}$满足$2\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\gamma}=3\boldsymbol{\beta}$，则$\boldsymbol{\gamma}=$__________.

7．设矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&0\\2&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，则$\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}=$____________.

8．已知$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&1&0\\-1&2&1\\3&4&2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0&2\\-1&1&1\\2&1&1\end{pmatrix}$，且满足$3\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}$，则$\boldsymbol{X}=$____________.

参考答案

1．A　2．D　3．$(1,5,-1)$　4．$\begin{pmatrix}3&2&0\\2&5&2\\0&2&7\end{pmatrix}$　5．$(12,25,-6)$

6．$(-21,7,15,13)$　7．$\begin{pmatrix}3&2&0\\2&3&0\\0&0&3\end{pmatrix}$　8．$\begin{pmatrix}4&3/2&-1\\-1&5/2&1\\7/2&11/2&5/2\end{pmatrix}$

考点 2 矩阵乘法与方阵的相关运算

【考点内容】

1．矩阵的乘法

两个矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$和 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})$可以相乘，当且仅当 $\boldsymbol{A}$ 的列数与 $\boldsymbol{B}$ 的行数相等．若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{C}$，则 $\boldsymbol{C}$ 的行数= $\boldsymbol{A}$ 的行数，$\boldsymbol{C}$ 的列数= B 的列数，且 $\boldsymbol{C}$ 的第 i 行第 j 列元素等于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行元素与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的第 j 列对应元素的乘积之和，即

$$\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\times a+2\times d&1\times b+2\times e&1\times c+2\times f\\3\times a+4\times d&3\times b+4\times e&3\times c+4\times f\end{pmatrix}$$

2．行矩阵(行向量)与列矩阵(列向量)的乘积是一个数，列矩阵(列向量)与行矩阵(行向量)的乘积是一个方阵：

$$(a_1,a_2,\cdots,a_n)\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}=a_1b_1+a_2b_2+\cdots a_nb_n=\sum_{i=1}^{n}a_ib_i,\quad \begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}(a_1,a_2,\cdots,a_n)=\begin{pmatrix}b_1a_1&b_1a_2&\cdots&b_1a_n\\b_2a_1&b_2a_2&\cdots&b_2a_n\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\b_na_1&b_na_2&\cdots&b_na_n\end{pmatrix}$$

3．矩阵的乘法不满足交换律

在一般情形下，矩阵的乘法不满足交换律，即一般 $\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$，从而有运算律：

$$(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC}),\ (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AC}+\boldsymbol{BC},\ \boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC},$$

所以，在进行矩阵乘法运算时要**注意左边或右边矩阵的一致性**．但单位矩阵和数量矩阵可与任意一个同阶方阵的乘积可交换，有

$$\boldsymbol{E}_n\boldsymbol{A}=\boldsymbol{AE}n=\boldsymbol{A},\ (a\boldsymbol{E}n)\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}(a\boldsymbol{E}n)=a\boldsymbol{A}.$$

4．矩阵的乘法不满足消去律

（1）当 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，$\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$ 时，不能推出 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$，例如，$\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$.

（2）当 $\boldsymbol{A}^2\neq\boldsymbol{O}$ 时，不能推出 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$，例如，$\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$.

（3）当 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC}$，$\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$ 时，不能推出 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$，例如，

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}.$$

（4）当 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{B}^2$ 时，不能推出$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=\boldsymbol{O}$ 和 $\boldsymbol{A}=\pm\boldsymbol{B}$. 例如，取 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0\\1&-1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-1&1\\0&1\end{pmatrix}$，显然 $\boldsymbol{A}=\pm\boldsymbol{B}$，并可验证 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}_2$，$\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{E}_2$，但

$$(A+B)(A-B)=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-1\\1&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-2\\2&-1\end{pmatrix}.$$

5．$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 可交换

如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$, 则称 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ **可交换.** 此时, $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 必为同阶方阵. 例如，设

$$A=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}3&0\\-2&3\end{pmatrix},\ \text{则有}\ AB=\begin{pmatrix}3&0\\4&3\end{pmatrix},\quad BA=\begin{pmatrix}3&0\\4&3\end{pmatrix}.$$

由此，可得以下重要结论：

（1）$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2=\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{BA}+\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}^2 \Leftrightarrow \boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$.

（2）$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{BA}-\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{B}^2 \Leftrightarrow \boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$.

（3）$(\boldsymbol{AB})k=\boldsymbol{A}k\boldsymbol{B}k \Leftrightarrow \boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$.

6．矩阵转置的运算法则

（1）$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$;

（2）$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$;

（3）$(k\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}=k\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$，$k$ 为任意实数;

（4）$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$，$(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\cdots\boldsymbol{A}k)^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_{k-1}^{\mathrm{T}}\cdots\boldsymbol{A}_1^{\mathrm{T}}$.

7．对称矩阵与反对称矩阵的判定

利用矩阵转置的运算法则验证：

若 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}\Leftrightarrow \boldsymbol{A}$ 为对称矩阵，若 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{A}\Leftrightarrow \boldsymbol{A}$ 为反对称矩阵.

8．方阵的行列式及运算性质

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}$ 的行列式：$|\boldsymbol{A}|=\det(\boldsymbol{A})=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$.

设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为 n 阶方阵，k 为常数，由方阵行列式的定义，可得

（1）$|\boldsymbol{E}n|=1$，$|a\boldsymbol{E}n|=an$；

（2）$|\boldsymbol{A}\mathbf{T}|=|\boldsymbol{A}|$

（3）$|k\boldsymbol{A}|=kn|\boldsymbol{A}|$

（4）$|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$. (行列式乘法法则)

9．方阵的多项式

根据方阵的幂运算，及矩阵的加减法和数乘，可定义方阵的多项式运算．它是以多项式的形式来表示方阵的一种方法. 设 $\boldsymbol{A}$ 为任意一个 n 阶方阵, $f(x)=amxm+am_{-1}x\,m^{-1}+\cdots+a_1x+a_0$，为任意给定的一个多项式，都可定义一个 n 阶方阵

$$f(\boldsymbol{A})=am\,\boldsymbol{A}\,m+am_{-1}\,\boldsymbol{A}\,m^{-1}+\cdots+a_1\boldsymbol{A}+a_0\boldsymbol{E}n,$$

称 $f(\boldsymbol{A})$为 $\boldsymbol{A}$ 的方阵多项式.

注意：在方阵多项式中，末项必须是数量矩阵 $a_0\boldsymbol{E}n$，而不是常数 a_0，因为矩阵不能和一个数相加减.

【典型例题】

【例 2-2】设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&1\\-1&1&-3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&4&2\\3&5&7\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}=$ ________.

解：$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&-1\\0&1\\1&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&4&2\\3&5&7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3&3&-3\\3&5&7\\-9&-11&-19\end{pmatrix}$.

【例 2-3】设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 均为三阶方阵，$|\boldsymbol{A}|=4$，$|\boldsymbol{B}|=5$，则 $|2\boldsymbol{AB}|=$ ________.

解：$|2\boldsymbol{AB}|=2^3|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|=8\times4\times5=160$.

【例 2-4】设 $\boldsymbol{A}$ 为任意 n 阶矩阵，下列矩阵中为反对称矩阵的是（　　）.

A. $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$　　B. $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$　　C. $\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}}$　　D. $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$

解：选 B．因为 A: $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$，为对称矩阵；B: $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{A}=-(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})$，为反对称矩阵；C: $(\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}}$，为对称矩阵；D: $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$，为对称矩阵.

【同步练习及参考答案】

一、单项选择题

1．设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=(1,1)$，则 $\boldsymbol{AB}=$（　　）.

A．0　　B．(1, -1)　　C．$\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$　　D．$\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix}$

2．已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1\\0&-1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BA}=$（　　）.

A．$\begin{pmatrix}1&0\\-2&-1\end{pmatrix}$　　B．$\begin{pmatrix}1&1\\0&-1\end{pmatrix}$　　C．$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$　　D．$\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$

3．设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$，则 A^3 等于（　　）.

A．$\begin{pmatrix}1&0\\3&1\end{pmatrix}$　　B．$\begin{pmatrix}1&0\\-3&1\end{pmatrix}$　　C．$\begin{pmatrix}1&3\\0&1\end{pmatrix}$　　D．$\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}$

4．设矩阵 $\boldsymbol{A}=(1,2)$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}$，则下列矩阵运算中有意义的是

（　　）.

A. ACB　　B. ABC　　C. BAC　　D. CBA

5. 设 A 为 n 阶方阵，令方阵 $B=A+A^{T}$，则必有（　　）.

A. $B^{T}=B$　　B. $B=2A$　　C. $B^{T}=-B$　　D. $B=O$

6. 设矩阵 A，B，C 为同阶方阵，则$(ABC)^{T}$=（　　）.

A. $A^{T}B^{T}C^{T}$　　B. $C^{T}B^{T}A^{T}$　　C. $C^{T}A^{T}B^{T}$　　D. $A^{T}C^{T}B^{T}$

7. 设 A、B 为 n 阶方阵，满足 $A^2=B^2$，则必有（　　）.

A. $A=B$　　B. $A=-B$　　C. $|A|=|B|$　　D. $|A|^2=|B|^2$

8. 设 A, B, C 为同阶方阵，下面矩阵的运算中不成立的是（　　）.

A. $(A+B)^{T}=A^{T}+B^{T}$　　B. $|AB|=|A||B|$

C. $(AB)^{T}=B^{T}A^{T}$　　D. $A(B+C)=BA+CA$

9. 若 $A=\begin{pmatrix}3&1&-2\\1&5&2\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}4&1\\-2&3\\2&1\end{pmatrix}$，$C=\begin{pmatrix}0&2&-1\\3&-1&2\end{pmatrix}$，则下列运算的结果为 3×2 矩阵的是（　　）.

A. ABC　　B. $AC^{T}B^{T}$　　C. CBA　　D. $C^{T}B^{T}A^{T}$

10. 设 A，B，X，Y 都是 n 阶方阵，则下面等式正确的是（　　）.

A. 若 $A^2=O$，则 $A=O$　　B. $(AB)^2=A^2B^2$

C. 若 $AX=AY$，则 $X=Y$　　D. 若 $A+X=B$，则 $X=B-A$

11. 设 A，B 是任意的 n 阶方阵，下列命题中正确的是（　　）.

A. $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$　　B. $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$

C. $(A-E)(A+E)=(A+E)(A-E)$　　D. $(AB)^2=A^2B^2$

12. 设 A，B 均为方阵，则下列结论中正确的是（　　）.

A. 若 $|AB|=0$，则 $A=O$ 或 $B=O$　　B. 若 $|AB|=0$，则 $|A|=0$ 或 $|B|=0$

C. 若 $AB=O$，则 $A=O$ 或 $B=O$　　D. 若 $AB\neq 0$，则 $|A|\neq 0$ 或 $|B|\neq 0$

13. 设 A、B 为同阶方阵，则必有（　　）.

A. $|A+B|=|A|+|B|$　　B. $AB=BA$

C. $(AB)^{T}=A^{T}B^{T}$　　D. $|AB|=|BA|$

14. 设 A，B 均为 n 阶矩阵，$(A+B)(A-B)=A^2-B^2$ 的充分必要条件是（　　）.

A. $A=E$　　B. $B=O$　　C. $A=B$　　D. $AB=BA$

15. 设 A，B 为 n 阶方阵，且 $A^{T}=-A$，$B^{T}=B$，则下列命题正确的是（　　）.

A. $(A+B)^{T}=A+B$　　B. $(AB)^{T}=-AB$

C. A^2 是对称矩阵　　D. B^2+A 是对称矩阵

16. $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ b & c & 0 \end{pmatrix}$为反对称矩阵，则必有（　　）.

A. $a=b=-1$，$c=0$　　B. $a=c=-1$，$b=0$

C. $a=c=0$，$b=-1$　　D. $b=c=-1$，$a=0$

17. 设 $\boldsymbol{A}$ 为任意 $\boldsymbol{n}$ 阶矩阵，下列矩阵中为反对称矩阵的是（　　）.

A. $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$　　B. $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$　　C. $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$　　D. $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$

18. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶对称矩阵，$\boldsymbol{B}$ 为 n 阶反对称矩阵，则下列矩阵中为反对称矩阵的是（　　）.

A. $\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BA}$　　B. $\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{BA}$　　C. $\boldsymbol{AB}$　　D. $\boldsymbol{BA}$

二、填空题

1. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}=$____________.

2. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{AB}=$____________.

3. 设 $\boldsymbol{A}=(3,\ 1,\ 0)$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 0 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{AB}=$__________.

4. 设 $\boldsymbol{A}=$（1，3，-1），$\boldsymbol{B}=$（2，1），则 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}=$______________________.

5. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & a \\ -a & -a \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} b & -b \\ -b & b \end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{AB}=$_______________.

6. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}=$_____________.

7. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{AB}^{\mathrm{T}}=$_________.

8. 若矩阵$\begin{pmatrix} 0 & a \\ 12 & 0 \end{pmatrix}$为实反对称矩阵，则 $a=$____________.

9. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$，则行列式$|\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=$_____________.

10. 已知 $\boldsymbol{\alpha}=$（1，2，3），则$|\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}|=$_____________.

11. 设 $\boldsymbol{A}=(-1,1,2)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{B}=(0,2,3)^{\mathrm{T}}$，则$|\boldsymbol{AB}^{\mathrm{T}}|=$_______________.

12. 设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 为同阶方阵，且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，则 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}^2=$_____________.

13．设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix}$，则行列式$|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}|$=____________.

14．设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶方阵，且$|\boldsymbol{A}|=3$，则$|2\boldsymbol{A}|$=____________.

15．设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵，且$|\boldsymbol{A}|=2$，则$|2\boldsymbol{A}|$=___________.

16．设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶方阵，若$|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=2$，则$|-3\boldsymbol{A}|$=__________.

17．设 3 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式$|\boldsymbol{A}|=\frac{1}{2}$，则$|\boldsymbol{A}^3|$=______________.

18. 设 $\det(\boldsymbol{A})=-1$, $\det(\boldsymbol{B})=2$, 且 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 为同阶方阵, 则 $\det((\boldsymbol{AB})^3)$=______________.

19．设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2\\-1 & 0\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$=_____________________.

三、计算题

1．已知矩阵 $\boldsymbol{B}$=（2，1，3），$\boldsymbol{C}$=（1，2，3），求（1）$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}$；（2）$\boldsymbol{A}^2$.

2．已知向量 $\boldsymbol{\alpha}=(1,2,k)$，$\boldsymbol{\beta}=(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3})$，且 $\boldsymbol{\beta\alpha}^{\mathrm{T}}=3$，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}$，求

（1）数 k 的值；（2）$\boldsymbol{A}^{10}$.

3．已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\2 & -1 & 0\\1 & 0 & 1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\2 & 1 & 0\\0 & 2 & 1\end{pmatrix}$，求：（1）$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}$；（2）$|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}|$.

四、证明题

1．设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶对称矩阵，$\boldsymbol{B}$ 为 n 阶反对称矩阵.

证明：（1）$\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BA}$ 为对称矩阵；（2）$\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{BA}$ 为反对称矩阵.

2．设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶反对称矩阵，证明$|\boldsymbol{A}|=0$.

参考答案

一、单项选择题

1．D　2．A　3．C　4．B　5．A　6．B　7．D　8．D　9．D
10．D　11．C　12．B　13．D　14．D　15．C　16．B　17．B　18．B

二、填空题

1．7　2．$\begin{pmatrix}3 & 2 & 6\\0 & 1 & 0\\1 & 4 & 2\end{pmatrix}$　3．$(2,3)$　4．$\begin{pmatrix}2 & 1\\6 & 3\\-2 & -1\end{pmatrix}$　5．$\boldsymbol{O}_{2\times 2}$　6．$\begin{pmatrix}4 & 2 & 3\\3 & 4 & 1\\1 & 2 & 0\end{pmatrix}$

7．$\boldsymbol{E}_2$　8．-12　9. 1　10. 0　11. 0　12. $\boldsymbol{O}$　13. 4　14. 24　15. 16

16． -54　　17． $\frac{1}{8}$　　18． -8　　19． $\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

三、计算题

1．（1） $A=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$　　（2） $A^2=13\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$

2．（1） $k=3$　　（2） $A^{10}=3^9\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 2 & 1 & 2/3 \\ 3 & 3/2 & 1 \end{pmatrix}$

3．（1） $\begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$　　（2） -2.

四、证明题

1．证明：由 A 为 n 阶对称矩阵，B 为 n 阶反对称矩阵，则有 $A^{\mathrm{T}}=A$， $B^{\mathrm{T}}=-B$，从而

（1）因为 $(AB-BA)^{\mathrm{T}}=(AB)^{\mathrm{T}}-(BA)^{\mathrm{T}}=B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}-A^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}=-BA-A(-B)=AB-BA$，
所以 $AB-BA$ 为对称矩阵；

（2）因为 $(AB+BA)^{\mathrm{T}}=(AB)^{\mathrm{T}}+(BA)^{\mathrm{T}}=B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}+A^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}=-BA+A(-B)=-(AB+BA)$，
所以 $AB+BA$ 为反对称矩阵.

2．证明：因为 $A^{\mathrm{T}}=-A$，即 $A=-A^{\mathrm{T}}$，所以 $|A|=|-A^{\mathrm{T}}|=(-1)^3|A^{\mathrm{T}}|=-|A|$，故 $|A|=0$.

考点3　方阵的逆矩阵及相关运算

【考点内容】

1．方阵 A 可逆的判定

（1）利用逆矩阵的定义式来判定

$$A,B \text{ 均为 } n \text{ 阶矩阵，若 } AB=En \Rightarrow A^{-1}=B,\ B^{-1}=A.$$

如果能根据所给的矩阵等式整理出两个方阵的乘积是单位矩阵，则其中一个方阵就是另一方阵的逆矩阵．如下例：

$$A^2-2E=O \Rightarrow A^2-E=E \Rightarrow (A+E)(A-E)=E \Rightarrow (A+E)^{-1}=A-E \text{ 且 } (A-E)^{-1}=A+E$$

（2）利用可逆矩阵的充要条件来判定

$$|A| \neq 0 \Rightarrow A \text{可逆}$$

只要一个方阵的行列式值不等，那么这个方阵就是可逆矩阵. 这是判断一个方阵是否可逆的较常用的一种方法，有时根据该知识点还可出证明题.

2．可逆矩阵的基本性质

设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 都是 n 阶的可逆矩阵，常数 $k \neq 0$，则由可逆矩阵的定义可得可逆矩阵具有以下基本性质

（1）$\boldsymbol{A}^{-1}$ 为可逆矩阵，且 $(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}=\boldsymbol{A}$;

（2）$\boldsymbol{AB}$ 为可逆矩阵，且 $(\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$；

设 $\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \cdots, \boldsymbol{A}_m$ 是 m 个同阶的可逆矩阵，则 $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\cdots\boldsymbol{A}_m$ 也可逆，且

$$(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\cdots\boldsymbol{A}_m)^{-1}=\boldsymbol{A}_m^{-1}\boldsymbol{A}_{m-1}^{-1}\cdots\boldsymbol{A}_2^{-1}\boldsymbol{A}_1^{-1}$$

（3）$k\boldsymbol{A}$ 为可逆矩阵，且 $(k\boldsymbol{A})^{-1}=\dfrac{1}{k}\boldsymbol{A}^{-1}$;

（4）$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 为可逆矩阵，且 $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}$；

（5）可逆矩阵可以从矩阵等式的同侧消去. 即将 $\boldsymbol{P}$ 为可逆矩阵时, 有 $\boldsymbol{PA}=\boldsymbol{PB} \Leftrightarrow \boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$; $\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{BP} \Leftrightarrow \boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

（6）设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶可逆矩阵. 记 $\boldsymbol{A}^0=\boldsymbol{E}n$, 并定义 $\boldsymbol{A}^{-}k=(\boldsymbol{A}^{-1})k$, 其中 k 是任意整数. 则有 $\boldsymbol{A}\,k\,\boldsymbol{A}\,l=\boldsymbol{A}k+l$，$(\boldsymbol{A}k)l=\boldsymbol{A}kl$． 这里 k 和 l 为任意整数.

3．伴随矩阵

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})n_{\mathrm{x}}n$，由$|\boldsymbol{A}|$的元素 a_{ij} 的代数余子式 A_{ij}，按列排成的一个 n 阶矩阵，称为方阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，即

$$\boldsymbol{A}^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

二阶方阵的伴随矩阵公式：设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，由伴随矩阵定义，可得 $\boldsymbol{A}^*=\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

4．伴随矩阵法求可逆矩阵

当$|\boldsymbol{A}| \neq 0$ 时，由 $\boldsymbol{AA^*}=\boldsymbol{A^*A}=|\boldsymbol{A}|\,\boldsymbol{E}n$ 可推出伴随矩阵法求可逆矩阵的公式

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*.$$

5．对角矩阵的逆矩阵还是对角矩阵

设 a, b, c 是三个不为 0 的常数，则有 $\begin{pmatrix} a & & \\ & b & \\ & & c \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/a & & \\ & 1/b & \\ & & 1/c \end{pmatrix}$.

6. 有关逆矩阵的方阵行列式计算

由 $\boldsymbol{AA^*} = \boldsymbol{A^*A} = |\boldsymbol{A}|\ \boldsymbol{E}n$ 可推出以下计算公式

① $\boldsymbol{A}^{-1} = \dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*$，②$(\boldsymbol{A}^*)^{-1} = \dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}$，③$\boldsymbol{A}^* = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$，④$|\boldsymbol{A}^*| = |\boldsymbol{A}|^{n-1}$.

由 $\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{A}\boldsymbol{-1} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{-1}\ \boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}n$ 可推出计算公式 ⑤$|\boldsymbol{A}^{-1}| = |\boldsymbol{A}|^{-1} = \dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}$.

说明：以上这 5 个公式完全可以作为已知公式记住，在考试过程中可以直接利用.

【典型例题】

【例 2-5】设方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^3\text{-}2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$，则$(\boldsymbol{A}^2\text{-}2\boldsymbol{E})^{-1}$=____________.

解：答案为$-\boldsymbol{A}$. 因为 $\boldsymbol{A}^3\text{-}2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}= \boldsymbol{O} \Leftrightarrow \boldsymbol{A}^3\text{-}2\boldsymbol{A}= -\boldsymbol{E} \Leftrightarrow (\boldsymbol{A}^2\text{-}2\boldsymbol{E})\ \boldsymbol{A}= -\boldsymbol{E} \Leftrightarrow (\boldsymbol{A}^2\text{-}2\boldsymbol{E})(-\boldsymbol{A})= \boldsymbol{E}$

【例 2-6】设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶可逆矩阵，则必有（　　）.

A. $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 可逆　　B. $\boldsymbol{AB}$ 可逆　　C. $\boldsymbol{A}\text{-}\boldsymbol{B}$ 可逆　　D. $\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{BA}$ 可逆

解：选 B. 因为 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶可逆矩阵，所以$|\boldsymbol{A}| \neq 0$且$|\boldsymbol{B}| \neq 0$. 只有 B 选项，$|\boldsymbol{AB}| = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}| \neq 0$.

【例 2-7】设 n 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 满足 $\boldsymbol{ABC}=\boldsymbol{E}$，则 $\boldsymbol{B}^{-1}$=（　　）.

A. $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}^{-1}$　　B. $\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$　　C. $\boldsymbol{AC}$　　D. $\boldsymbol{CA}$

解：选 D. 因为 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 均为 n 阶可逆矩阵，所以有 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{ABC}\,\boldsymbol{C}^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}^{-1}$，从而 $\boldsymbol{B}^{-1} = \boldsymbol{CA}$.

【例 2-8】设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}^{-1}$ =（　　）.

A. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$　　B. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$　　C. $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　　D. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

解：选 B. 由对角矩阵的逆矩阵公式即可得.

【例 2-9】已知 2 阶矩阵 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 的行列式 $|A|=-1$，则 $(A^*)^{-1}=$（　　）.

A. $\begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix}$　　B. $\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$　　C. $\begin{pmatrix} -d & b \\ c & -a \end{pmatrix}$　　D. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

解：选 A. 根据题目条件，由公式 $(A^*)^{-1}=\dfrac{1}{|A|}A$ 即可得.

【例 2-10】设 A 为 3 阶方阵，且 $|A|=2$，则 $|2A^{-1}|=$（　　）.

A. -4　　B. -1　　C. 1　　D. 4

解：选 D. 因为 $|2A^{-1}|=|2A^{-1}|=2^3|A^{-1}|=8\dfrac{1}{|A|}=4$.

【例 2-11】设 A 为 3 阶矩阵，$|A|=-\dfrac{1}{2}$，则行列式 $\left|(2A)^{-1}\right|=$ ________.

解：答案为 $-\dfrac{1}{4}$. 因为 $\left|(2A)^{-1}\right|=\dfrac{1}{|2A|}=\dfrac{1}{2^3|A|}=-\dfrac{1}{4}$.

【同步练习及参考答案】

一、单项选择题

1. 设 n 阶方阵 A、B、C 满足 $ABC=E$，则必有（　　）.

A. $ACB=E$　　B. $CBA=E$　　C. $BCA=E$　　D. $BAC=E$

2. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$，则 A^* 中位于第 1 行第 2 列的元素是（　　）.

A. -6　　B. -3　　C. 3　　D. 6

3. 设 2 阶矩阵 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，则 $A^*=$（　　）.

A. $\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$　　B. $\begin{pmatrix} -d & c \\ b & -a \end{pmatrix}$　　C. $\begin{pmatrix} -d & b \\ c & -a \end{pmatrix}$　　D. $\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$

4. 矩阵 $\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵是（　　）.

A. $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$　　B. $\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$　　C. $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1/3 & 1 \end{pmatrix}$　　D. $\begin{pmatrix} 1 & 1/3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

5. 矩阵 $A=\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ 的伴随矩阵 $A^*=$（　　）.

A. $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$　　B. $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$　　C. $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$　　D. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

6. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$，则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*=$（　　）.

A. $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$　　B. $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$　　C. $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$　　D. $\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

7. 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 满足 $\boldsymbol{ABC}=\boldsymbol{E}$，则 $\boldsymbol{C}^{-1}=$（　　）.

A. $\boldsymbol{AB}$　　B. $\boldsymbol{BA}$　　C. $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^{-1}$　　D. $\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$

8. $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ 均为 n 阶方阵，$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$，$\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{CA}$，则 $\boldsymbol{ABC}=$（　　）.

A. $\boldsymbol{ACB}$　　B. $\boldsymbol{CAB}$　　C. $\boldsymbol{CBA}$　　D. $\boldsymbol{BCA}$

9. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，$\boldsymbol{O}$ 是 n 阶零矩阵，且 $\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$，则必有（　　）.

A. $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$　　B. $\boldsymbol{A}=-\boldsymbol{E}$　　C. $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^{-1}$　　D. $|\boldsymbol{A}|=1$

10. 设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}^*=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，则 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=$（　　）.

A. $\boldsymbol{E}$　　B. $2\boldsymbol{E}$　　C. $6\boldsymbol{E}$　　D. $\sqrt{6}\,\boldsymbol{E}$

11. 设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 为同阶方阵，下列等式中恒正确的是（　　）.

A. $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$　　B. $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$

C. $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}|+|\boldsymbol{B}|$　　D. $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$

12. 设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 为同阶可逆方阵，则下列等式中错误的是（　　）.

A. $|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{A}|\,|\boldsymbol{B}|$　　B. $(\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$

C. $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$　　D. $(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$

13. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 2 阶可逆矩阵，且已知 $(2\boldsymbol{A})^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}=$（　　）.

A. $2\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$　　B. $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

C. $2\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1}$　　D. $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1}$

14. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$，则 $|\boldsymbol{A}^*|=$（　　）.

A. -4　　B. -2　　C. 2　　D. 4

15. 若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则下列等式成立的是（　　）.

A. $A=\frac{1}{|A|}A^*$　　B. $|A|=0$

C. $(A^2)^{-1}=(A^{-1})^2$　　D. $(3A)^{-1}=3A^{-1}$

16．设矩阵 A 的伴随矩阵 $A^*=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$，则 A^{-1}=（　　）.

A. $-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4&-3\\-2&1\end{pmatrix}$　　B. $-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-2\\-3&4\end{pmatrix}$

C. $-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$　　D. $-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4&2\\3&1\end{pmatrix}$

17．已知 $A^2+A-E=O$，则矩阵 A^{-1}=（　　）.

A. $A-E$　　B. $-A-E$　　C. $A+E$　　D. $-A+E$

18．设 A，B 均为 n 阶可逆阵，则下列等式成立的是（　　）.

A. $(AB)^{-1}=A^{-1}B^{-1}$　　B. $(A+B)^{-1}=A^{-1}+B^{-1}$

C. $|(AB)^{-1}|=\frac{1}{|AB|}$　　D. $|(A+B)^{-1}|=|A^{-1}|+|B^{-1}|$

19．设 A 为 n 阶方阵，λ 为实数，则 $|\lambda A|$=（　　）.

A. $\lambda|A|$　　B. $|\lambda||A|$　　C. $\lambda n|A|$　　D. $|\lambda|n|A|$

20．设 A 为 3 阶方阵，且已知 $|-2A|=2$，则 $|A|$=（　　）.

A. -1　　B. $-\frac{1}{4}$　　C. $\frac{1}{4}$　　D. 1

21．设 A 是 3 阶方阵，且 $|A|=-\frac{1}{2}$，则 $|A^{-1}|$=（　　）.

A. -2　　B. $-\frac{1}{2}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. 2

22．设 A 为三阶方阵，且 $|A|=-2$，则 $|3A^{\mathrm{T}}A|$=（　　）.

A. -108　　B. -12　　C. 12　　D. 108

23．设 A 为四阶矩阵，且 $|A|=2$，则 $|A^*|$=（　　）.

A. 2　　B. 4　　C. 8　　D. 12

24．设 A 为 n 阶方阵，$n\geq 2$，则 $|-5A|$=（　　）.

A. $(-5)^n|A|$　　B. $-5|A|$　　C. $5|A|$　　D. $5n|A|$

25．设 A 为三阶矩阵，且 $|A|=2$，则 $|(A^*)^{-1}|$=（　　）.

A. $\frac{1}{4}$　　B. 1　　C. 2　　D. 4

26．设 A 为 3 阶方阵，且 $\left|-\frac{1}{3}A\right|=\frac{1}{3}$，则 $|A|$=（　　）.

A. -9　　　B. -3　　　C. -1　　　D. 9

二、填空题

1. 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2\\2&3\end{pmatrix}$，则$|\boldsymbol{A}|$中第一行第二列元素的代数余子式为______.

2. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1\\2&0\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}^*=$ ______.

3. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&1\\3&5\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}^*=$ ______ .

4. 矩阵 $\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}&-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$ 的逆矩阵是______.

5. 设 2 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$，则矩阵 $\boldsymbol{A}=$______.

6. 设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&2&0\\3&3&3\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=$______.

7. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&3&0\\0&0&2\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}^*=$______.

8. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&0\\2&0&0\\0&1&3\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}^*=$______.

9. 设方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}k=\boldsymbol{E}$，这里 k 为正整数，则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的逆 $\boldsymbol{A}^{-1}=$______.

10. 若 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，$|\boldsymbol{A}|=3$，且 $\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=$______.

11. 设 $\boldsymbol{A}$ 满足 $3\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{O}$，则 $\boldsymbol{A}^{-1}=$______.

12. 已知 $\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{A}-8\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$，则$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^{-1}=$______.

13. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶可逆矩阵，且$|\boldsymbol{A}|=-\frac{1}{n}$，则$|\boldsymbol{A}^{-1}|=$______.

14. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶方阵，且$|\boldsymbol{A}|=3$，　则$|3\boldsymbol{A}^{-1}|=$______.

15. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是 3 阶矩阵，且$|\boldsymbol{A}|=2$，$\boldsymbol{B}=-2\boldsymbol{E}$，则$|\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}|=$______.

16. 若 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵，且$|\boldsymbol{A}|=\frac{1}{9}$，则$|(3\boldsymbol{A})^{-1}|$______.

17. 设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 均为三阶可逆方阵，且$|\boldsymbol{A}|=2$，则$|-2\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}|=$______.

18．$\boldsymbol{A}$ 是 3 阶矩阵，若$|\boldsymbol{A}^*|=4$，且$|\boldsymbol{A}|<0$，则$|\boldsymbol{A}|=$____________.

三、计算题

1．设 2 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式$|\boldsymbol{A}|=\dfrac{1}{2}$，求行列式$|(2\boldsymbol{A})^{-1}+2\boldsymbol{A}^*|$的值.

2．设$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\2&1&0\\-3&2&-5\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

3．设$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&2&1\\1&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

4．设$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&-3&1\\4&-5&2\\5&-7&3\end{pmatrix}$，判断 $\boldsymbol{A}$ 是否可逆，若可逆，求其逆矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

四、证明题

1．设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵，且$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^2=\boldsymbol{O}$，证明 $\boldsymbol{A}$ 可逆.
2．设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶矩阵，且 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{B}$，证明 $\boldsymbol{A}$ 可逆.
3．设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶$(n\geq 2)$可逆矩阵，证明$(\boldsymbol{AB})^*=\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{A}^*$.

参考答案

一、单项选择题

1．C　2．A　3．A　4．C　5．D　6．B　7．A　8．D　9．C
10．C　11．D　12．C　13．D　14．B　15．C　16．C　17．C　18．C
19．C　20．B　21．A　22．D　23．C　24．A　25．A　26．A

二、填空题

1．-2　2．$\begin{pmatrix}0&-1\\-2&0\end{pmatrix}$　3．$\begin{pmatrix}5&-1\\-3&2\end{pmatrix}$　4．$\begin{pmatrix}\sqrt{3}/2&1/2\\-1/2&\sqrt{3}/2\end{pmatrix}$　5．$\begin{pmatrix}-2&1\\3/2&-1\end{pmatrix}$

6．$6\boldsymbol{E}_3$　7．$\begin{pmatrix}6&-4&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$　8．$\begin{pmatrix}0&-6&0\\-6&3&0\\2&-1&-4\end{pmatrix}$　9．$\boldsymbol{A}^{k-1}$　10．$3\boldsymbol{E}_n$

11．$\dfrac{1}{3}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})$　12．$\dfrac{1}{5}(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E})$　13．$-n$　14．9　15．-4　16．$\dfrac{1}{3}$

17．-32　　18．-2

三、计算题

1．$\frac{9}{2}$　2．$\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-5 & 2 & -1\\ 10 & -2 & 2\\ 7 & -2 & 1\end{pmatrix}$　3．$\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 0 & 2 & -2\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix}$　4．$\boldsymbol{A}$ 可逆，$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & 2 & -1\\ -2 & 1 & 0\\ -3 & -1 & 2\end{pmatrix}$

四、证明题

1．证明：由于 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^2=\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}=\boldsymbol{0}$，于是 $-(\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A})=\boldsymbol{E} \Rightarrow -\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})=\boldsymbol{E}$ $\Rightarrow \boldsymbol{A}[-(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})]=\boldsymbol{E} \Rightarrow |\boldsymbol{A}|\neq 0$，所以 $\boldsymbol{A}$ 可逆.

2．证明　$\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{B} \Leftrightarrow \boldsymbol{B}^2-\boldsymbol{B}=0 \Leftrightarrow \boldsymbol{B}^2-\boldsymbol{B}-2\boldsymbol{E}=-2\boldsymbol{E} \Leftrightarrow (\boldsymbol{B}+\boldsymbol{E})(\boldsymbol{B}-2\boldsymbol{E})=-2\boldsymbol{E} \Leftrightarrow$ $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}-2\boldsymbol{E})=-2\boldsymbol{E}$，从而有 $|\boldsymbol{A}||(\boldsymbol{B}-2\boldsymbol{E})|=|-2\boldsymbol{E}|=(-2)^n\neq 0$，得 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$，故 $\boldsymbol{A}$ 可逆.

3．证明：由于 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶可逆矩阵，则 $\boldsymbol{AB}$ 也为 n 阶可逆矩阵，且

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*,\quad \boldsymbol{B}^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{B}|}\boldsymbol{B}^*,\quad (\boldsymbol{AB})^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{AB}|}(\boldsymbol{AB})^*,$$

所以 $(\boldsymbol{AB})^*=|\boldsymbol{AB}|(\boldsymbol{AB})^{-1}=|\boldsymbol{A}|\bullet|\boldsymbol{B}|\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}=(|\boldsymbol{B}|\boldsymbol{B}^{-1})(|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1})=\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{A}^*$.

考点 4　分块矩阵

【考点内容】

1．分块对角矩阵（准对角矩阵）

形如 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1 & & & \\ & \boldsymbol{A}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{A}_r\end{pmatrix}$ 的分块矩阵称为分块对角矩阵或准对角矩阵，其中 $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\cdots,\boldsymbol{A}_r$ 均为方阵.

2．准对角矩阵的逆矩阵

若 $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\cdots,\boldsymbol{A}_r$ 都是可逆矩阵，则分块对角矩阵 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1 & & & \\ & \boldsymbol{A}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{A}_r\end{pmatrix}$ 可逆，并且

$$\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_r \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A_1^{-1} & & & \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_r^{-1} \end{pmatrix}.$$

3．分块三角矩阵的行列式

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1r} \\ & A_{22} & \cdots & A_{2r} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & A_{rr} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_{11} & & & \\ A_{21} & A_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ A_{r1} & A_{r2} & \cdots & A_{rr} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_{11} & & & \\ & A_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_{rr} \end{vmatrix} = |A_{11}|\cdot|A_{22}|\cdots|A_{rr}|.$$

准上三角矩阵、准下三角矩阵和准对角矩阵的行列式值都等于它们的主对角线上各子块的行列式值的乘积.

4. $\begin{pmatrix} O & B \\ C & O \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} O & C^{-1} \\ B^{-1} & O \end{pmatrix}$

【典型例题】

【例 2-12】设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$，则 $A^{-1}=$____________，$|A|=$____________.

解：因为 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，$(2)^{-1}=\dfrac{1}{2}$，所以 $A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$；$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\times 2 = 2$.

【同步练习及参考答案】

1．设矩阵 A，B 均为可逆方阵，则以下结论正确的是（　　）.

A. $\begin{pmatrix} A & \\ & B \end{pmatrix}$可逆，且其逆为$\begin{pmatrix} & A^{-1} \\ B^{-1} & \end{pmatrix}$

B. $\begin{pmatrix} A & \\ & B \end{pmatrix}$不可逆

C. $\begin{pmatrix} A & \\ & B \end{pmatrix}$可逆，且其逆为$\begin{pmatrix} & B^{-1} \\ A^{-1} & \end{pmatrix}$

D. $\begin{pmatrix} A & \\ & B \end{pmatrix}$可逆，且其逆为$\begin{pmatrix} A^{-1} & \\ & B^{-1} \end{pmatrix}$

2．设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶可逆矩阵，且 $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{C}^{-1}$ 是（　　）.

A. $\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}^{-1} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}^{-1}\end{pmatrix}$　　B. $\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}^{-1}\\ \boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$　　C. $\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}^{-1}\\ \boldsymbol{B}^{-1} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$　　D. $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}^{-1}\end{pmatrix}$

3．设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 2\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}^{-1}=$____________.

4．设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 3\\ 0 & 2 & 5\\ 2 & 0 & 0\end{pmatrix}$，则 $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}=$____________.

5．设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}5 & 2 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}^{-1}=$____________.

参考答案

1．D　2．C　3．$\begin{pmatrix}1/2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1/2\end{pmatrix}$　4．$\begin{pmatrix}0 & -5 & 2\\ 0 & 3 & -1\\ 1/2 & 0 & 0\end{pmatrix}$　5．$\begin{pmatrix}1 & -2 & 0 & 0\\ -2 & 5 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & -1 & 2\end{pmatrix}$

考点 5　矩阵的初等变换与初等方阵

【考点内容】

1．初等变换

对一个矩阵 $\boldsymbol{A}$ 施行以下三种类型的变换，称为矩阵的初等行（列）变换，统称为矩阵的初等变换：

（1）交换 $\boldsymbol{A}$ 的某两行（列）；

（2）用一个非零数 k 乘 $\boldsymbol{A}$ 的某一行（列）；

（3）把 $\boldsymbol{A}$ 中某一行（列）的 k 倍加到另一行（列）上.

注意：矩阵的初等变换与行列式计算有本质区别，行列式计算是求值过程，前后用等号连接，而对矩阵施行初等变换则是变换过程，一般变换前后的两个矩阵是不相等的，故用“ $\rightarrow$ ”连接前后矩阵.

初等变换是矩阵理论中一个常用的运算，而且最常见的是利用矩阵的初等行变换把矩阵化成阶梯形矩阵，进一步化为简化行阶梯形矩阵（行最简形矩阵）.

2．初等方阵

由单位方阵 $\boldsymbol{E}$ 经过一次初等变换得到的矩阵称为初等方阵. 由于初等变换有三种类型，相应的有三种类型的初等方阵，依次记为 $\boldsymbol{P}_{ij}$，$\boldsymbol{D}_i(k)$ 和 $\boldsymbol{T}_{ij}(k)$. 容易证明，初等方阵都是可逆矩阵，且它们的逆矩阵还是同一类的初等方阵：

$$\boldsymbol{P}_{ij}^{-1}=\boldsymbol{P}_{ij},\ \boldsymbol{D}_i(k)^{-1}=\boldsymbol{D}_i(k^{-1}),\ \boldsymbol{T}_{ij}(k)^{-1}=\boldsymbol{T}_{ij}(-k).$$

3．初等变换与初等方阵的关系

设 $\boldsymbol{A}$ 为任一个矩阵，当在 $\boldsymbol{A}$ 的左边乘一个初等方阵的乘积相当于对 $\boldsymbol{A}$ 作同类型的初等行变换；在 $\boldsymbol{A}$ 的右边乘一个初等方阵的乘积相当于对 $\boldsymbol{A}$ 作同类型的初等列变换.

定理 2.5.1 $\boldsymbol{P}_{ij}$ 左（右）乘 $\boldsymbol{A}$ 就是互换 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行（列）和第 j 行（列）；

$\boldsymbol{D}_i(k)$ 左（右）乘 $\boldsymbol{A}$ 就是用非零数 k 乘 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行（列）；

$\boldsymbol{T}_{ij}(k)$左乘 $\boldsymbol{A}$ 就是把 $\boldsymbol{A}$ 中的第 j 行的 k 倍加到第 i 行上；

$\boldsymbol{T}_{ij}(k)$右乘 $\boldsymbol{A}$ 就是把 $\boldsymbol{A}$ 中的第 i 列的 k 倍加到第 j 列上；

4．矩阵的等价标准形

定理 2.5.1 任意一个 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$，一定可以经过有限次初等行变换和初等列变换化成如下形式的 $m\times n$ 矩阵：

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix},$$

这是一个分块矩阵，其中 $\boldsymbol{E}_r$ 为 r 阶单位矩阵，而其余子块都零块矩阵. 称 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的等价标准形.

5．矩阵方程

（1）初等行变换法：主要用于三阶方阵，且所含元素中零元素较少的方程

首先将所给的方程通过提公因式、合并等运算过程化为 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{XA}=\boldsymbol{B}$ 的形式，之后再用初等行变换法求解.

求解矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 的思路：

第 1 步：构造大的矩阵$(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{B})$，就是左边矩阵为 $\boldsymbol{A}$，右边是矩阵为 $\boldsymbol{B}$；

第 2 步：对矩阵$(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{B})$施行初等行变换，当左边的 $\boldsymbol{A}$ 化为单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 时，右边的矩阵 $\boldsymbol{B}$ 就化为所求的未知矩阵 $\boldsymbol{X}$ 了，要清楚矩阵变换中间用的是箭头连接.

左边的 $\boldsymbol{A}$ 化为单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 的步骤如下（以 3 阶为例）：

① 用变换１，2 将元素 a_{11} 化为 1（没必要一定化为 1，只要下方的元素是 a_{11} 的整数倍即可，最后再化为１）；

② 再用变换 3 将 a_{11} 下方的元素化为０；

③ 用变换１，2 将元素 a_{22} 化为 1（没必要一定化为 1，只要下方的元素是 a_{22} 的整

数倍即可，最后再化为 1）；

④ 再用变换 3 将 a_{22} 下方的元素化为 0 ；

⑤ 用变换 2 将元素 a_{33} 化为 1 (没必要一定化为 1，只要上方的元素是 a_{33} 的整数倍即可，最后再化为 1)，这时将左边的 $\boldsymbol{A}$ 化为了上三角矩阵；

⑥ 再用变换 3 将 a_{33} 上方的元素化为 0 ；

⑦ 再用变换 3 将 a_{22} 上方的元素化为 0 ；

⑧ 最后若 $\boldsymbol{A}$ 主对角线上的元素有不为 1 的，再用变换 2 将其化为 1，这时就将左边的 $\boldsymbol{A}$ 化为了单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 了.

注意：求可逆矩阵的逆矩阵也属矩阵方程的求解，因为就是求矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{E}$，其中 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}$

若求解 $\boldsymbol{XA}=\boldsymbol{B}$ 方程时，先将两边同时转置，化为 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$，再按方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 的思路求解，所得的结果是 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}$，要再转置回来 $\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$.

（2）逆矩阵法：主要用于二阶方阵或含对角矩阵、初等矩阵的方程，即先求出逆矩阵，再用乘法将方程化为 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{XA}=\boldsymbol{B}$ 的形式，之后再用初等行变换法求得结果. 注意矩阵乘法不满足交换律，方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{XA}=\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{AXB}=\boldsymbol{C}$ 分别对应为 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{BA}^{-1}$，$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{CB}^{-1}$.

（3）整理后同侧消去：这种情况未知矩阵所满足的方程多数比较复杂，但只要通过整理能将两边同侧同时出现的可逆矩阵消去, 结果很简单, 基本不需要施行初等变换. 需要知道下列公式：

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{E}=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{E}^2=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}),\\
&\boldsymbol{A}^3-\boldsymbol{E}=\boldsymbol{A}^3-\boldsymbol{E}^3=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}),\\
&\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}=\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{AE}+\boldsymbol{E}^2=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^2,\\
&\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}=\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{AE}+\boldsymbol{E}^2=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^2,\\
&\boldsymbol{A}^3+\boldsymbol{E}=\boldsymbol{A}^3+\boldsymbol{E}^3=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}).
\end{aligned}
$$

【典型例题】

【例 2-13】下列矩阵中不是初等矩阵的为（　　）.

A. $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$　　B. $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$　　C. $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$　　D. $\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$

解：答案 D. 初等矩阵的定义：单位矩阵经过一次初等变换得到的矩阵. 选项 D 需要经过两次初等变换.

【例 2-14】设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}a_{21}+a_{11}&a_{22}+a_{12}\\a_{11}&a_{12}\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$，

则必有（　　）.

A．$P_1P_2A=B$　　B．$P_2P_1A=B$　　C．$AP_1P_2=B$　　D．$AP_2P_1=B$

解：答案 A．由 A 到 B 相当于 A 先将第一行加到第二行再互换两行得到 B．即用初等方阵左乘 A.

【例 2-15】设矩阵 $A=\begin{pmatrix}4&3\\2&1\end{pmatrix}$，$P=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$，则 PAP^2________.

解：答案为 $\begin{pmatrix}2&1\\4&3\end{pmatrix}$．初等方阵左乘 A 相当于对 A 做行变换，右乘 A 相当于对 A 做列变换．PAP^2 相当于对 A 互换两行再两次互换两列.

【例 2-16】已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}a^3&a^2&a&1\\a^2&a&1&0\\a&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}$，求 A^{-1}.

解：

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc}a^3&a^2&a&1&1&0&0&0\\a^2&a&1&0&0&1&0&0\\a&1&0&0&0&0&1&0\\1&0&0&0&0&0&0&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&0&0&0&1\\a&1&0&0&0&0&1&0\\a^2&a&1&0&0&1&0&0\\a^3&a^2&a&1&1&0&0&0\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&0&0&0&1\\0&1&0&0&0&0&1&-a\\0&a&1&0&0&1&0&-a^2\\0&a^2&a&1&1&0&0&-a^3\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&0&0&0&1\\0&1&0&0&0&0&1&-a\\0&0&1&0&0&1&-a&0\\0&0&a&1&1&0&-a^2&0\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&0&0&0&1\\0&1&0&0&0&0&1&-a\\0&0&1&0&0&1&-a&0\\0&0&0&1&1&-a&0&0\end{array}\right)，从而\ A^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&-a\\0&1&-a&0\\1&-a&0&0\end{pmatrix}.$$

【例 2-17】解矩阵方程 $\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&2&2\\1&-1&0\end{pmatrix}X+\begin{pmatrix}0&1\\1&0\\4&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\\2&1\end{pmatrix}$.

解：原方程组可化为 $\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&2&2\\1&-1&0\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\\2&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&1\\1&0\\4&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-2\\0&1\\-2&-2\end{pmatrix}$，用初等行变换法求 X,

由

$$\begin{pmatrix}1&1&-1&1&-2\\0&2&2&0&1\\1&-1&0&-2&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-1&1&-2\\0&2&2&0&1\\0&-2&1&-3&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-1&1&-2\\0&2&2&0&1\\0&0&3&-3&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-1&1&-2\\0&1&1&0&\frac{1}{2}\\0&0&1&-1&\frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&1&0&0&-\frac{5}{3}\\0&1&0&1&\frac{1}{6}\\0&0&1&-1&\frac{1}{3}\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&-1&-\frac{11}{6}\\0&1&0&1&\frac{1}{6}\\0&0&1&-1&\frac{1}{3}\end{pmatrix}，故 X=\begin{pmatrix}-1&-\frac{11}{6}\\1&\frac{1}{6}\\-1&\frac{1}{3}\end{pmatrix}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}-6&-11\\6&1\\-6&2\end{pmatrix}$$

【例 2-18】设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-3&0\\2&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$，矩阵 $\boldsymbol{X}$ 满足关系式 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{X}=\boldsymbol{XA}$，求 $\boldsymbol{X}$.

解：由于 $|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}|\neq 0$，因此 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$ 可逆. 且有 $\boldsymbol{AX}-\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{E}$，即 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{E}$，

故 $\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}(\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{E})=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}2&0&1\\0&3&0\\1&6&2\end{pmatrix}$.

【例 2-19】设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&1\\5&3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1&3\\2&0\\3&1\end{pmatrix}$，且满足 $\boldsymbol{A}*\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$，求矩阵 $\boldsymbol{X}$.

解：因为 $|\boldsymbol{B}|=1$，所以 $\boldsymbol{B}$ 可逆，且有 $\boldsymbol{B}^{-1}=\dfrac{\boldsymbol{B}^*}{|\boldsymbol{B}|}=\boldsymbol{B}^*=\begin{pmatrix}3&-1\\-5&2\end{pmatrix}$. 故由 $\boldsymbol{A}*\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$ 得，

$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{CB}^{-1}=\begin{pmatrix}1&3\\2&0\\3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&-1\\-5&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-12&5\\6&-2\\4&-1\end{pmatrix}$. 用初等行变换法求 $\boldsymbol{X}$，由

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{D})=\begin{pmatrix}1&2&3&-12&5\\2&2&1&6&-2\\3&4&3&4&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&3&-12&5\\0&-2&-5&30&-12\\0&-2&-6&40&-16\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&3&-12&5\\0&-2&-5&30&-12\\0&0&-1&10&-4\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&2&0&18&-7\\0&-2&0&-20&8\\0&0&1&-10&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&-2&1\\0&1&0&10&-4\\0&0&1&-10&4\end{pmatrix}，所以 \boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}-2&1\\10&-4\\-10&4\end{pmatrix}.$$

【例 2-20】设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&6&1\end{pmatrix}$，而 $\boldsymbol{X}$ 满足 $\boldsymbol{AX}+\boldsymbol{E}=\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{X}$，求 $\boldsymbol{X}$.

解：由 $\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E}$ 得，$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{E}$，又因 $|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}1&1&5\\0&3&-2\\4&-3&0\end{vmatrix}=-74$，则

$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$ 可逆,

从而 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}3&1&5\\0&5&-2\\4&-3&2\end{pmatrix}$.

【同步练习及参考答案】

一、单项选择题

1.下列矩阵中，不是初等方阵的是（　　）.

A. $\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$　B. $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$　C. $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$　D. $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-2\\0&0&1\end{pmatrix}$

2. 下列矩阵中，是初等矩阵的为（　　）.

A. $\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$　B. $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$　C. $\begin{pmatrix}1&0&8\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$　D. $\begin{pmatrix}1&0&8\\0&1&8\\0&0&1\end{pmatrix}$

3. 下列矩阵中不是初等矩阵的是（　　）.

A. $\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$　B. $\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$　C. $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&3&0\\0&0&1\end{pmatrix}$　D. $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\2&0&1\end{pmatrix}$

4. 下列矩阵中，是初等矩阵的为（　　）.

A. $\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$　B. $\begin{pmatrix}0&1&-1\\-1&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}$　C. $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$　D. $\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&3\\1&0&0\end{pmatrix}$

5. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 2 阶可逆矩阵，则下列矩阵中与 $\boldsymbol{A}$ 等价的矩阵是（　　）.

A. $\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$　B. $\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$　C. $\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$　D. $\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$

6. 设 3 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 2，则与 $\boldsymbol{A}$ 等价的矩阵为（　　）.

A. $\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$　B. $\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$　C. $\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&2\\0&0&0\end{pmatrix}$　D. $\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&2\\3&3&3\end{pmatrix}$

7. 已知 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶可逆矩阵，则下列矩阵中与 $\boldsymbol{A}$ 等价的是（　　）.

A. $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$　B. $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$　C. $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$　D. $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

8．设矩阵 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$，$\boldsymbol{X}$ 为同阶方阵，且 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 可逆，$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$，则矩阵 $\boldsymbol{X}$=（　　）．

A．$A^{-1}CB^{-1}$　B．$CA^{-1}B^{-1}$　C．$B^{-1}A^{-1}C$　D．$CB^{-1}A^{-1}$

9．设矩阵 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{X}$ 为同阶方阵，且 $\boldsymbol{A}$ 可逆，若 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{E})=\boldsymbol{E}$，则矩阵 $\boldsymbol{X}=$（　　）．

A．$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}^{-1}$　B．$\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$　C．$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$　D．$\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^{-1}$

10．设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵，将 $\boldsymbol{A}$ 的第 3 行乘以 $-\dfrac{1}{2}$ 得到单位矩阵 $\boldsymbol{E}$，则 $|\boldsymbol{A}|=$（　　）．

A．-2　B．$-\dfrac{1}{2}$　C．$\dfrac{1}{2}$　D．2

11．已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}a_{11}&3a_{12}&a_{13}\\a_{21}&3a_{22}&a_{23}\\a_{31}&3a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&3&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}1&0&0\\3&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{B}$=（　　）．

A．$\boldsymbol{PA}$　B．$\boldsymbol{AP}$　C．$\boldsymbol{QA}$　D．$\boldsymbol{AQ}$

12．设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，将 $\boldsymbol{A}$ 的第 1 列与第 2 列交换得到方阵 $\boldsymbol{B}$，若 $|\boldsymbol{A}|\neq|\boldsymbol{B}|$，则必有（　　）．

A．$|\boldsymbol{A}|=0$　B．$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|\neq 0$　C．$|\boldsymbol{A}|\neq 0$　D．$|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}|\neq 0$

13．设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵，$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，则用 $\boldsymbol{P}$ 左乘 $\boldsymbol{A}$，相当于将 $\boldsymbol{A}$（　　）．

A．第 1 行的 2 倍加到第 2 行　B．第 1 列的 2 倍加到第 2 列

C．第 2 行的 2 倍加到第 1 行　D．第 2 列的 2 倍加到第 1 列

二、填空题

1．设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{AP}^{\mathrm{T}}$=_____________．

2．设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-3\\-2&4\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{AP}^3$=_______________．

3．设 $\boldsymbol{A}$ 为 2 阶矩阵，将 $\boldsymbol{A}$ 的第 1 行加到第 2 行得到 $\boldsymbol{B}$，若 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}$=__________．

4. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 2 阶矩阵, 将 $\boldsymbol{A}$ 的第 2 列的(-2)倍加到第 1 列得到矩阵 $\boldsymbol{B}$, 若 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$,

则 A=________.

5．设矩阵 $B=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$，$P=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}$，若矩阵 A 满足 $PA=B$，则 A=___________.

6．已知 $A=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&1&2\end{pmatrix}$，若矩阵 X 满足 $AX=B$，则 X=___________.

7．已知矩阵方程 $XA=B$，其中 $A=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&-1\\1&0\end{pmatrix}$，则 $X=$___________.

8．矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\2&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$的等价标准形为___________.

三、计算题

1．求 3 阶方阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&2\\1&0&3\end{pmatrix}$的逆矩阵.

2．已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}-1&4\\2&5\\1&-3\end{pmatrix}$.（1）求 A^{-1}；（2）解矩阵方程 $AX=B$.

3．已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&-1&0\\0&1&2\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}3&0&1\\1&1&0\\0&1&4\end{pmatrix}$，（1）求 A 的逆矩阵 A^{-1}；（2）解矩阵方程 $AX=B$.

4．设矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&1\\5&3\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&3\\2&0\end{pmatrix}$，求矩阵方程 $XA=B$ 的解 X.

5．已知 $A=\begin{pmatrix}2&5\\1&3\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&2\\4&-3\end{pmatrix}$，$C=\begin{pmatrix}2&1\\5&-2\end{pmatrix}$，$X$ 满足 $AX+B=C$，求 X.

6．已知 $A=\begin{pmatrix}1&4\\-1&2\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}2&0\\-1&1\end{pmatrix}$，$C=\begin{pmatrix}3&1\\0&-1\end{pmatrix}$，矩阵 X 满足 $AXB=C$，求解 X.

7．已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}-1&1\\-1&0\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}-1&1\\0&2\end{pmatrix}$，矩阵 X 满足 $AX+B=X$，求 X.

8．设矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&1\\-1&2\end{pmatrix}$，$E$ 为 2 阶单位矩阵，矩阵 B 满足 $BA=B+E$，求 $|B|$.

9．已知 $A=\begin{pmatrix}2&3\\1&0\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}-3&-1\\-2&1\end{pmatrix}$，$C=\begin{pmatrix}0&-1&1\\1&2&0\end{pmatrix}$，$D=\begin{pmatrix}1&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$，矩阵 X 满足方程 $AX+BX=D-C$，求 X.

10．已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\\3&4&0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\2&0&0\end{pmatrix}$，求矩阵 $\boldsymbol{X}$，使得 $\boldsymbol{XA}=\boldsymbol{B}$.

11．已知 $\boldsymbol{X}\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&2&2\\0&-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1&-1\\4&0&-1\end{pmatrix}$，求矩阵 $\boldsymbol{X}$.

12．设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&2\\2&2&3\\4&3&3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&1\\-1&2&2\end{pmatrix}$，矩阵 $\boldsymbol{X}$ 满足 $\boldsymbol{XA}=\boldsymbol{B}$，求 $\boldsymbol{X}$.

13．设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$，且矩阵 $\boldsymbol{X}$ 满足 $\boldsymbol{AX}+\boldsymbol{E}=\boldsymbol{A}^3+\boldsymbol{X}$，求 $\boldsymbol{X}$.

14．设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&1&1\\-1&0&-1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&-1\\2&0\\5&-3\end{pmatrix}$，矩阵 $\boldsymbol{X}$ 满足 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{AX}+\boldsymbol{B}$，求 $\boldsymbol{X}$.

15．设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4&-3&1\\-1&20&4\\1&18&4\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&1\\0&5&3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1&-4&3\\2&0&-1\\1&2&0\end{pmatrix}$，若矩阵 $\boldsymbol{X}$ 满足 $(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{X})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$，求 $\boldsymbol{X}$.

16．设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\-2&2&2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&1&2\\0&2&2\\0&4&6\end{pmatrix}$，求满足方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 的矩阵 $\boldsymbol{X}$.

17．设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&1&5\\0&4&-2\\4&-3&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}$ 是三阶方阵，且满足 $\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E}$，求 $\boldsymbol{B}$.

18．设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&&\\&3&\\&&5\end{pmatrix}$，且矩阵 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{ABA}^{-1}=4\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{BA}^{-1}$，求矩阵 $\boldsymbol{B}$.

19．求解矩阵方程 $\begin{pmatrix}1&3&1\\2&5&1\\0&0&1\end{pmatrix}\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}-1&4\\2&5\\1&-3\end{pmatrix}$.

20．设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-1&-2&0\\2&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，求满足矩阵方程 $\boldsymbol{XA}-\boldsymbol{B}=2\boldsymbol{E}$ 的矩阵 $\boldsymbol{X}$.

21．设矩阵 $\boldsymbol{X}$ 满足方程 $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\boldsymbol{X}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{X}$.

22．设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$，又 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$，求矩阵 $\boldsymbol{X}$.

23．设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$，且 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{X}$ 满足 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{E}$，求 $\boldsymbol{X}$，$\boldsymbol{X}^{-1}$.

24．设 2 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆，且 $\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$，对于矩阵 $\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$，令 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_2$，求 $\boldsymbol{B}^{-1}$.

25．设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵，将 $\boldsymbol{A}$ 的第 1 列与第 2 列互换得到矩阵 $\boldsymbol{B}$，再将 $\boldsymbol{B}$ 的第 2 列加到第 3 列得到矩阵 $\boldsymbol{C}$，求满足关系式 $\boldsymbol{AQ}=\boldsymbol{C}$ 的矩阵 $\boldsymbol{Q}$.

26．设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11}-3a_{31} & a_{12}-3a_{32} & a_{13}-3a_{33} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$，求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{PA}=\boldsymbol{B}$.

参考答案

一、单项选择题

1．C　2．C　3．A　4．C　5．D　6．B　7．D　8．D　9．A
10．A　11．B　12．C　13．A

二、填空题

1．$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$　2．$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$　3．$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$　4．$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 11 & 4 \end{pmatrix}$　5．$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \frac{3}{2} & 2 \end{pmatrix}$

6．$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$　7．$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$　8．$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

三、计算题

1. $A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2}\\ 1 & 1 & -1\\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$　　2.（1）$A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$；（2）$X=\begin{pmatrix}-4 & -9\\ 0 & 11\\ 1 & -3\end{pmatrix}$

3.（1）$A^{-1}=\begin{pmatrix}2 & -1 & -1\\ 2 & -2 & -1\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}$；（2）$X=\begin{pmatrix}5 & -2 & -2\\ 4 & -3 & -2\\ -2 & 2 & 3\end{pmatrix}$　　4. $X=\begin{pmatrix}-12 & 5\\ 6 & -2\end{pmatrix}$

5. $X=\begin{pmatrix}-2 & -8\\ 1 & 3\end{pmatrix}$　　6. $X=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1/4 & 0\end{pmatrix}$　　7. $X=\begin{pmatrix}-1/3 & 1\\ 1/3 & 1\end{pmatrix}$　　8. $|B|=\frac{1}{2}$

9. $X=\begin{pmatrix}1 & 7 & -3\\ 1 & 5 & -2\end{pmatrix}$　　10. $X=\begin{pmatrix}3 & -10 & 6\\ 8 & -24 & 14\end{pmatrix}$　　11. $X=\begin{pmatrix}2 & \frac{1}{2} & 2\\ 4 & \frac{3}{2} & 7\end{pmatrix}$

12. $X=\begin{pmatrix}3 & -3 & 1\\ 2 & -2 & 1\\ -11 & 11 & -3\end{pmatrix}$　　13. $X=\begin{pmatrix}2 & -2 & 3\\ 3 & 2 & 1\\ 1 & 3 & 3\end{pmatrix}$　　14. $X=\begin{bmatrix}3 & -1\\ 2 & 0\\ 1 & -1\end{bmatrix}$

15. $X=\begin{pmatrix}1 & 8 & -3\\ -1 & 5 & 2\\ 0 & 4 & 2\end{pmatrix}$　　16. $X=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 2 & 4\\ 3 & -1 & -1\end{pmatrix}$　　17. $B=\begin{pmatrix}3 & 1 & 5\\ 0 & 5 & -2\\ 4 & -3 & 2\end{pmatrix}$

18. $B=4\begin{pmatrix}4 & & \\ & 2 & \\ & & 1\end{pmatrix}$　　19. $X=\begin{pmatrix}13 & -11\\ -5 & 6\\ 1 & -3\end{pmatrix}$　　20. $X=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ -1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$

21. $X=\begin{pmatrix}1/2 & 3/2 & -2\\ -2 & 1 & 0\\ 1/2 & 0 & -1\end{pmatrix}$　　22. $X=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 2 & -1\\ 2 & 0\end{pmatrix}$　　23. $X=\begin{pmatrix}1/2 & 0 & 0\\ 0 & 1/2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

24. $B^{-1}=\begin{pmatrix}b_1 & b_2-2b_1\\ a_1 & a_2-2a_1\end{pmatrix}$　　25. $Q=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$　　26. $P=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -3\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

考点 6　矩阵的秩

【考点内容】

1．矩阵的秩的定义

在 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中，任意取定 k 行和 k 列，$k\leq\min\{m, n\}$．位于这些行与列交叉处的 k^2 个元素按原来的相对顺序排成的 k 阶行列式称为 $\boldsymbol{A}$ 的一个 k 阶子式. 可以分成两大类：值为零的与值不为零的．值不为零的子式称为非零子式.

定义 2.6.1 在 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中，非零子式的最高阶数称为 $\boldsymbol{A}$ 的秩，记为 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})$．有时也可用秩$(\boldsymbol{A})$表示 $\boldsymbol{A}$ 的秩.

所谓非零子式的最高阶数指的是，在所有的不等于零的那些子式中，阶数最高的子式的阶数．例如，当 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=3$ 时，说明在 $\boldsymbol{A}$ 中至少有一个三阶子式不为零，而所有的阶数大于 3 的子式都等于零．但这并不是说，$\boldsymbol{A}$ 中的所有三阶子式都不为零．如果在 $\boldsymbol{A}$ 中找到某个 r 阶子式不等于零，那么只能断定 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})\geq r$，因为有可能存在某些阶数大于 r 的非零子式．如果发现 $\boldsymbol{A}$ 中所有的 r 阶子式都等于零，根据行列式展开定理，此时可以断定 $\boldsymbol{A}$ 中的所有阶数大于 r 的子式也都等于零，那么就能断定 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})\leq r-1$．因为 $\boldsymbol{A}$ 中非零子式的最高阶数必小于 r.

2．阶梯形矩阵

定义 2.6.2 满足下列两个条件的矩阵称为阶梯形矩阵：

(1) 如果存在全零行（元素全为零的行），则全零行都位于矩阵中非零行（元素不全为零的行）的下方；

(2) 各非零行中从左边数起的第一个非零元素（称为主元）的列指标 j 随着行指标的递增而严格增大.

注意 阶梯形矩阵的特点是：主元（从左边起非零行的第一个不为零的元素）逐行向右平移（有时可能不是一个单位元素），例如上三角形矩阵就是阶梯形矩阵.

若在阶梯形矩阵的基础上再将主元全化为 1，所在列的其他元素全化为 0，得到的阶梯形矩阵称为简化行阶梯形矩阵，或称为行最简形矩阵.

3．矩阵的秩的求解

(1) 定义法：$r(\boldsymbol{A})$ =最高阶非零子式的阶数.

(2) 初等行变换法：

定理 2.6.1 对矩阵施行初等变换，不改变矩阵的秩.

推论　设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{Q}$ 分别为 m 阶和 n 阶可逆矩阵，则

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{PA})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A}),\quad \mathrm{r}(\boldsymbol{AQ})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A}).$$

定理 2.6.2 对于任意一个非零矩阵，都可以通过初等行变换把它化成阶梯形矩阵.

既然矩阵的初等变换不改变其秩，而阶梯形矩阵的秩就等于它的非零行行数（或主元的个数），那么只要用初等变换把任意矩阵 $\boldsymbol{A}$ 化成阶梯形矩阵 T，就可求出它的秩.

$$r(\boldsymbol{A})= r(\boldsymbol{T}) = \text{“}\boldsymbol{T}\text{ 中非零行的行数”}.$$

将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 化为阶梯形矩阵 T 的步骤：

① 用变换 1, 2 将元素 a_{11} 化为 1 (没必要一定化为 1，只要下方的元素是 a_{11} 的整数倍即可)；

② 再用变换 3 将 a_{11} 下方的元素化为 0；

③ 用变换 1, 2 将元素 a_{22} 化为 1 (没必要一定化为 1，只要下方的元素是 a_{22} 的整数倍即可)；

④ 再用变换 3 将 a_{22} 下方的元素化为 0；

⑤ 用变换 1, 2 将元素 a_{33} 化为 1 (没必要一定化为 1，只要下方的元素是 a_{33} 的整数倍即可)；

⑥ 再用变换 3 将 a_{33} 下方的元素化为 0；

⑦ 这样变换下去，直到变换的成阶梯形矩阵为止，一般变到第三行就结束了.

4．矩阵秩的相关结论

（1）设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，则 $r(\boldsymbol{A})\leq \min\{m, n\}$.

（2）$r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}) = r(\boldsymbol{A})$. 实际上，$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 中的最高阶非零子式的阶数必相同.

（3）n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 为可逆矩阵 $\Leftrightarrow |\boldsymbol{A}|\neq 0 \Leftrightarrow r(\boldsymbol{A}) = n$. 所以，可逆矩阵常称为满秩矩阵. 秩为 m 的 $m\times n$ 矩阵称为行满秩矩阵. 秩为 n 的 $m\times n$ 矩阵称为列满秩矩阵.

【典型例题】

【例 2-21】已知 $\boldsymbol{A}$ 是一个 3×4 矩阵，下列命题中正确的是（　　）.

A．若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中所有 3 阶子式都为 0，则秩$(\boldsymbol{A})$=2

B．若 $\boldsymbol{A}$ 中存在 2 阶子式不为 0，则秩$(\boldsymbol{A})$=2

C．若秩$(\boldsymbol{A})$=2，则 $\boldsymbol{A}$ 中所有 3 阶子式都为 0

D．若秩$(\boldsymbol{A})$=2，则 $\boldsymbol{A}$ 中所有 2 阶子式都不为 0

解：答案 C．由定义 $r(\boldsymbol{A})$ =最高阶非零子式的阶数.

【例 2-22】设 $\boldsymbol{A}$ 是 4×3 矩阵且 $r(\boldsymbol{A})=2$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0&3\\0&2&0\\-1&0&3\end{pmatrix}$，则 $r(\boldsymbol{AB})=$______________.

解：答案为 2．因为 $|B|\neq 0$ 所以 $r(\boldsymbol{AB})=r(\boldsymbol{A})$=2

【例 2-23】设 $A=\begin{pmatrix}-2&1&1&-2\\1&-2&1&a\\1&1&-2&2\end{pmatrix}$，试确定 a 使 $r(A)=2$.

解：$\begin{pmatrix}-2&1&1&-2\\1&-2&1&a\\1&1&-2&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-2&2\\1&-2&1&a\\-2&1&1&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-2&2\\0&-3&3&a-2\\0&3&-3&2\end{pmatrix}$

$\to\begin{pmatrix}1&1&-2&2\\0&-3&3&a-2\\0&0&0&a\end{pmatrix}$

故 $a=0$ 时 $r(A)=2$.

【同步练习及参考答案】

一、单项选择题

1. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&-2&3&4\\0&0&0&5\end{pmatrix}$，则 A 中（　　）.

   A. 所有 2 阶子式都不为零　　B. 所有 2 阶子式都为零

   C. 所有 3 阶子式都不为零　　D. 存在一个 3 阶子式不为零

2. 设 A 是 4×5 矩阵，秩$(A)=3$，则（　　）.

   A. A 中的 4 阶子式都不为 0　　B. A 中存在不为 0 的 4 阶子式

   C. A 中的 3 阶子式都不为 0　　D. A 中存在不为 0 的 3 阶子式

3. 设 A 为 5×4 矩阵，若秩$(A)=4$，则秩$(5A^{T})$为（　　）.

   A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5

4. 设 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&1&1\\0&2&1\\0&0&3\end{pmatrix}$，则 $r(A)=$（　　）.

   A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

5. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&3&1\\0&2&-1&4\\0&0&0&5\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，则秩（$A$）=（　　）.

   A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

6．设 $A=\begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 \\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 \end{pmatrix}$，其中 $a_i \neq 0, b_i \neq 0, i=1,2,3$，则矩阵 A 的秩为（　　）.

A．0　　B．1　　C．2　　D．3

7．设 3 阶矩阵 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，则 A^2 的秩为（　　）.

A．0　　B．1　　C．2　　D．3

8．设 A 为 3 阶矩阵，A 的秩 $r(A)=3$，则矩阵 A^* 的秩 $r(A^*)=$（　　）.

A．0　　B．1　　C．2　　D．3

9．设 4 阶矩阵 A 的元素均为 3，则 $r(A)=$（　　）.

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

二、填空题

1．设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，矩阵 $B=A-E$，则矩阵 B 的秩 $r(B)=$______________.

2．设 A 为 $m\times n$ 矩阵，C 是 n 阶可逆矩阵，矩阵 A 的秩为 r，则矩阵 $B=AC$ 的秩为__________.

3．设 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & c \\ b & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$，且秩$(A)=3$，则 a，b，c 应满足______________.

4．设 3 阶矩阵 A 的秩为 2，矩阵 $P=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，$Q=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，若矩阵 $B=QAP$，则 $r(B)=$______.

5．若 $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & t \end{pmatrix}$，且 $r(A)=2$，则 $t=$____________.

6．设 B 是 3 阶矩阵，O 是 3 阶零矩阵，$r(B)=1$，则分块矩阵 $\begin{pmatrix} E & O \\ B & -B \end{pmatrix}$ 的秩为__________.

7．设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & t \end{pmatrix}$，且 $r(A)=2$，则 $t=$_____________.

三、计算题

1．求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&-2&4&-2&0\\3&0&6&-1&1\\0&3&0&0&1\\1&-1&2&1&0\end{pmatrix}$的秩.

2．设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&\lambda&-1&2\\2&-1&\lambda&5\\1&10&-6&1\end{pmatrix}$，对参数 λ 讨论矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩.

3．设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&5&8\\2&4&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0&2&1\\0&2&5&9\\0&0&3&0\end{pmatrix}$，求矩阵 $\boldsymbol{AB}$ 的秩.

4．设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&-1&3\\4&8&-4&12\\3&6&-3&a\end{pmatrix}$，问 a 为何值时，（1）秩$(\boldsymbol{A})=1$；（2）秩$(\boldsymbol{A})=2$.

5．设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&-1&1\\3&2&\lambda&-1\\5&6&3&t\end{pmatrix}$，已知 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=2$，求 λ，t 的值.

参考答案

一、单项选择题

1．D　2．D　3．C　4．C　5．C　6．B　7．B　8．D　9.A

二、填空题

1．2　2．r　3．$a\neq 2bc$　4．2　5．11　6．4　7．-2

三、计算题

1．3　2．当 $\lambda=3$ 时，$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=2$；当 $\lambda\neq 3$ 时，$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=3$　3．秩$(\boldsymbol{AB})$=秩$(\boldsymbol{B})$=3

4.（1）当 $a-9=0$，即 $a=9$ 时，秩$(\boldsymbol{A})=1$；（2）当 $a-9\neq 0$，即 $a\neq 9$ 时，秩$(\boldsymbol{A})=2$

5. $\lambda=5$，$t=1$

第 3 章　空 间 向 量

【考核要求】

学习本章，要求了解 n 维向量的概念；掌握向量是同维向量组的线性组合的概念和组合系数的求法；理解向量组线性相关与线性无关的定义和判别法；理解向量组的极大无关组的定义和向量组的秩的定义；会求向量组的极大无关组和向量组的秩；清楚向量组的秩与矩阵的秩之间的关系．了解向量空间的定义和向量空间的基与维数和坐标的概念．

本章重点：线性组合系数的求法；向量组线性相关和线性无关的定义及其判别法；求向量组的秩．

难点：向量组线性相关和线性无关的判别法；向量组秩的概念．

考点 1　向量的线性运算与线性组合

【考点内容】

1．向量及其线性运算

定义 3.1.1　由 n 个数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 组成的有序数组 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$，称为一个 n 维向量，数 a_i 称为该向量的第 i 个分量．向量有行向量与列向量之分，向量维数是指该向量中所含分量的个数．

定义 3.1.2　如果 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 与 n 维向量 $\boldsymbol{\beta}=(b_1, b_2, \cdots, b_n)$ 的对应分量都相等，即 $a_i=b_i\ (i=1,2,\cdots,n)$，则称向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 相等，记作 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}$．

定义 3.1.3　（向量的加法）设 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1, a_2, \cdots, a_n)$，$\boldsymbol{\beta}=(b_1, b_2, \cdots, b_n)$，则向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的和是向量

$$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=(a_1+b_1, a_2+b_2, \cdots, a_n+b_n).$$

利用负向量的概念，可以定义向量的减法：

$$\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}+(-\boldsymbol{\beta})=(a_1-b_1, a_2-b_2, \cdots, a_n-b_n).$$

定义 3.1.4　（数与向量的乘法）设 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 是一个 n 维向量，k 为一个常数，则数 k 与 $\boldsymbol{\alpha}$ 的乘积为数乘向量，简称为数乘，记作 $k\boldsymbol{\alpha}$，并且

$$k\boldsymbol{\alpha}=k(a_1, a_2, \cdots, a_n)=(ka_1, ka_2, \cdots, ka_n).$$

注意：向量的线性运算其实是矩阵的线性运算的一种特殊情况．

2．向量的线性组合

（1）线性组合的定义

若干个同维数的行或列向量所组成的集合称为向量组，m 个向量组成的向量组可记为

$$\boldsymbol{R}:\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m \text{ 或 } \boldsymbol{R}=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m\}.$$

定义 3.1.5 设 n 维向量组 $\boldsymbol{R}=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m\}$， $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 是一组常数，则称

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1,k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m,$$

为向量组 $\boldsymbol{R}:\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 的一个线性组合．常数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 称为该线性组合的组合系数.

若一个 n 维向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可以表示成

$$\boldsymbol{\beta}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1,k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m,$$

则称 $\boldsymbol{\beta}$ 是向量组 $\boldsymbol{R}:\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 的一个线性组合，或称 $\boldsymbol{\beta}$ 可用向量组 $\boldsymbol{R}:\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表出(或线性表示)．仍称 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 为组合系数，或表出系数.

（2）线性组合的判定

向量 $\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^{\mathrm{T}}$ 可用向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(a_{11},a_{21},\cdots,a_{n1})^{\mathrm{T}}$，$\cdots$，$\boldsymbol{\alpha}_m=(a_{1m},a_{2m},\cdots,a_{nm})^{\mathrm{T}}$ 线性表出

$\Leftrightarrow$ 存在 m 个常数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$，使得 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1,k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\boldsymbol{\beta}$，

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a_{11}k_1+a_{12}k_2+\cdots+a_{1m}k_n=b_1,\\ a_{21}k_1+a_{22}k_2+\cdots+a_{2m}k_n=b_2,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{n1}k_1+a_{n2}k_2+\cdots+a_{nm}k_n=b_n,\end{cases}\text{，这 } n \text{ 个等式同时成立,}$$

$$\Leftrightarrow m\text{ 元线性方程组}\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1m}x_n=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2m}x_n=b_2,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nm}x_n=b_n,\end{cases}\text{有解 } x_1=k_1,x_2=k_2,\cdots,x_m=k_m.$$

若上述方程组有唯一解，则表明 $\boldsymbol{\beta}$ 可用向量组 $\boldsymbol{R}:\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表出，且表示法唯一.

若上述方程组有无穷多解，则表明 $\boldsymbol{\beta}$ 可用向量组 $\boldsymbol{R}:\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表出，且表示法不唯一.

若上述方程组有无解，则表明 $\boldsymbol{\beta}$ 不可用向量组 $\boldsymbol{R}:\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表出.

【典型例题】

【例 3-1】设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，其中 $\boldsymbol{\alpha}_i(i=1,2,3)$ 是三维列向量，若 $|\boldsymbol{A}|=1$，则 $|(4\boldsymbol{\alpha}_1,2\boldsymbol{\alpha}_1-3\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)|=$（　　）.

A．-24　　B．-12　　C．12　　D．24

解：选 B. $\left|(4\boldsymbol{\alpha}_1,2\boldsymbol{\alpha}_1-3\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\right|=\left|(4\boldsymbol{\alpha}_1,2\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3)\right|+\left|(4\boldsymbol{\alpha}_1,-3\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\right|=0-12\left|(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\right|=$

$-12|\boldsymbol{A}|=-12$.

【例 3-2】设向量 $\boldsymbol{\alpha}=(6,-2,0,4)$，$\boldsymbol{\beta}=(-3,1,5,7)$，向量 $\boldsymbol{\gamma}$ 满足 $2\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\gamma}=3\boldsymbol{\beta}$，则 $\boldsymbol{\gamma}=$______.

解：答案为 $(-21,7,15,13)$.由题知 $\boldsymbol{\gamma}=3\boldsymbol{\beta}-2\boldsymbol{\alpha}=(-9,3,15,21)-(12,-4,0,8)=(-21,7,15,13)$.

【例 3-3】设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\3\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\-3\\2\\4\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}3\\0\\2\\-1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}0\\-1\\4\\9\end{pmatrix}$，判定 $\boldsymbol{\alpha}_4$ 是否可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，若可以，求出其表示式.

解：由
$$\begin{pmatrix}-2&1&3&0\\1&-3&0&-1\\0&2&2&4\\3&4&-1&9\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-3&0&-1\\0&-5&3&-2\\0&2&2&4\\0&13&-1&12\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-3&0&-1\\0&1&1&2\\0&-5&3&-2\\0&13&-1&12\end{pmatrix}$$
$$\to\begin{pmatrix}1&-3&0&-1\\0&1&1&2\\0&0&8&8\\0&0&-14&-14\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-3&0&-1\\0&1&1&2\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&2\\0&1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

得到 $x_1=2$， $x_2=1$， $x_3=1$.

所以 $\boldsymbol{\alpha}_4$ 可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出，且表示式为 $\boldsymbol{\alpha}_4=2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$.

【同步练习及参考答案】

一、单项选择题

1．设 3 阶方阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，其中 $\boldsymbol{\alpha}_i$ $(i=1,2,3)$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的列向量，且 $|\boldsymbol{A}|=2$，则 $|\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|=$（　　）.

A．-2　　B．0　　C．2　　D．6

2．设 3 阶方阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，其中 $\boldsymbol{\alpha}_i$ $(i=1,2,3)$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的列向量，若 $|\boldsymbol{B}|=|(\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)|=6$，则 $|\boldsymbol{A}|=$（　　）.

A．-12　　B．-6　　C．6　　D．12

3．设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,0)^{\mathrm{T}}$，则下列向量中可由 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表出的是（　　）.

A．$(0,-1,2)^{\mathrm{T}}$　　B．$(-1,2,0)^{\mathrm{T}}$　　C．$(-1,0,2)^{\mathrm{T}}$　　D．$(1,2,-1)^{\mathrm{T}}$

4．设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(2,0,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(0,0,-1)^{\mathrm{T}}$，则下列向量中可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表示的是（　　）.

A．$(-1,-1,-1)^{\mathrm{T}}$　　B．$(0,-1,-1)^{\mathrm{T}}$

C. $(-1,-1,0)^{\mathrm{T}}$　　D. $(-1,0,-1)^{\mathrm{T}}$

5. 已知向量 $2\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=(1,-2,-2,-1)^{\mathrm{T}}$，$3\boldsymbol{\alpha}+2\boldsymbol{\beta}=(1,-4,-3,0)^{\mathrm{T}}$，则 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=$（　　）.

A. $(0,-2,-1,1)^{\mathrm{T}}$　　B. $(-2,0,-1,1)^{\mathrm{T}}$

C. $(1,-1,-2,0)^{\mathrm{T}}$　　D. $(2,-6,-5,-1)^{\mathrm{T}}$

6. 设向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=(-1,4)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,-2)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(3,-8)$，若有常数 a，b 使 $a\boldsymbol{\alpha}_1-b\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0}$，则（　　）.

A. $a=-1,b=-2$　　B. $a=-1,b=2$　　C. $a=1,b=-2$　　D. $a=1,b=2$

7. 设 $\boldsymbol{\beta}$ 可由向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,0)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(0,0,1)$ 线性表示，则下列向量中 $\boldsymbol{\beta}$ 只能是（　　）.

A. (2,1,1)　　B. (-3,0,2)　　C. (1,1,0)　　D. (0,-1,0)

二、填空题

1. 设向量 $\boldsymbol{\alpha}=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}=(3,5,1)^{\mathrm{T}}$，则 $\boldsymbol{\beta}-2\boldsymbol{\alpha}=$__________.

2. 设向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,3)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(0,0,2)$，则 $2\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2=$____________.

3. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-2,5)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(4,7,-2)$，则 $-2\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2=$____________.

4. 已知 3 维向量 $\boldsymbol{\alpha}=(1,-3,3)$，$\boldsymbol{\beta}=(1,0,-1)$，则 $\boldsymbol{\alpha}+3\boldsymbol{\beta}=$_____________.

5. 设 4 维向量 $\boldsymbol{\alpha}=(3,-1,0,2)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}=(3,1,-1,4)^{\mathrm{T}}$，若向量 $\boldsymbol{\gamma}$ 满足 $2\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\gamma}=3\boldsymbol{\beta}$，则 $\boldsymbol{\gamma}=$_____________.

6. 已知向量 $\boldsymbol{\alpha}=(3,5,7,9)$，$\boldsymbol{\beta}=(-1,5,2,0)$，如果 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{\beta}$，则 $\boldsymbol{\xi}=$_________.

7. 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1-5\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\beta}$，其中 $\boldsymbol{\alpha}_1=(3,4,-1)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,3)$，$\boldsymbol{\beta}=(0,2,-5)$，则 $\boldsymbol{\alpha}_3=$________.

8. 设三阶矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，其中 $\boldsymbol{\alpha}_i(i=1,2,3)$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的列向量，且 $|\boldsymbol{A}|=2$，则 $|(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3)|=$______________.

9. 设三阶方阵 $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]$，其中 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的列向量，且 $|\boldsymbol{A}|=3$，若 $\boldsymbol{B}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3]$，则 $|\boldsymbol{B}|=$____________.

10. 设向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=(-1,4)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,2)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(4,2)^{\mathrm{T}}$，则 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 由 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表出的表示式为________.

11. 设向量 $\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,0,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}=(0,1,1)^{\mathrm{T}}$，则 $\boldsymbol{\beta}$ 由 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出的表示式为_____________.

三、计算题

1. 设向量 $\boldsymbol{\alpha}=(1,-1,-1,1)$，$\boldsymbol{\beta}=(-1,1,1,-1)$，求（1）矩阵 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}$；（2）$\boldsymbol{A}^2$.

2. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha},2\boldsymbol{\gamma}_2,3\boldsymbol{\gamma}_3)$，$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3)$，其中 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3$ 均为 3 维列向量，且 $|\boldsymbol{A}|=18$，$|\boldsymbol{B}|=2$，求 $|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}|$.

3. 设 $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$，$\boldsymbol{\gamma}_2$，$\boldsymbol{\gamma}_3$，$\boldsymbol{\gamma}_4$ 均为 4 维列向量，$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3,\boldsymbol{\gamma}_4)$ 和 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3,\boldsymbol{\gamma}_4)$ 为 4 阶方阵．若行列式 $|\boldsymbol{A}|=4$，$|\boldsymbol{B}|=1$，求行列式 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|$ 的值.

4．设向量 $\boldsymbol{\alpha}=(3,2)$，求$(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})^{101}$.

5．设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\3\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}-3\\1\\2\\4\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}0\\3\\2\\-1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}-1\\0\\4\\9\end{pmatrix}$，试判断 $\boldsymbol{\alpha}_4$ 是否可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，如果可以，将 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 表示出来.

6．设向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,2,1,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(k+1,1,k,k+1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}=(k^2+1,1,1,1)^{\mathrm{T}}$，试确定 k 取何值时 $\boldsymbol{\beta}$ 能由 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出，并写出表示式.

参考答案

一、单项选择题

1．C　2．C　3．B　4．D　5．A　6．A　7．B

二、填空题

1．$(1,5,-1)^{\mathrm{T}}$　2．$(2,4,4)$　3．$(10,25,-16)$　4．$(4,-3,0)$　5．$(3,5,-3,8)^{\mathrm{T}}$

6．$(-4,0,-5,-9)$　7．$\left(1,-1,\frac{1}{2}\right)$　8．-2　9．3　10．$\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2$

11．$\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_3$

三、计算题

1．（1）$\begin{pmatrix}-1&1&1&-1\\1&-1&-1&1\\1&-1&-1&1\\-1&1&1&-1\end{pmatrix}$　（2）$\begin{pmatrix}4&-4&-4&4\\-4&4&4&-4\\-4&4&4&-4\\4&-4&-4&4\end{pmatrix}$　2．2　3．40

4．$13^{100}\begin{pmatrix}9&6\\6&4\end{pmatrix}$　5. $\boldsymbol{\alpha}_4$ 可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示 $\boldsymbol{\alpha}_4=2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$　6．$\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1$

考点 2　线性相关与线性无关

【考点内容】

1．线性相关与线性无关的定义

定义 3.2.1 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 是 m 个 n 维向量．如果存在 m 个不全为零的数

$k_1, k_2, \cdots, k_m$，使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_m\boldsymbol{\alpha}_m = 0\,,$$

则称向量组$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$线性相关．否则，向量组$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$线性无关，即如果$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_m\boldsymbol{\alpha}_m = 0$，必有$k_1 = k_2 = \cdots = k_m = 0$成立．

根据线性相关与线性无关的定义，可得

（1）任意一个含零向量的向量组必为线性相关组．

事实上，不妨设向量组为$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{m-1}, \boldsymbol{\alpha}_m, 0$，

则必有$0\bullet\boldsymbol{\alpha}_1 + 0\bullet\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + 0\bullet\boldsymbol{\alpha}_{m-1} + 1\bullet 0 = 0$．

（2）单个向量$\boldsymbol{\alpha}$线性相关$\Leftrightarrow \boldsymbol{\alpha} = 0$；单个向量$\boldsymbol{\alpha}$线性无关$\Leftrightarrow \boldsymbol{\alpha} \neq 0$．

（3）两个非零的n维向量$\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$线性相关当且仅当存在不全为零的数$k, l$，使得$k\boldsymbol{\alpha} + l\boldsymbol{\beta} = 0$，即$\boldsymbol{\alpha} = -\dfrac{l}{k}\boldsymbol{\beta}$或$\boldsymbol{\beta} = -\dfrac{k}{l}\boldsymbol{\alpha}$．

这说明$\boldsymbol{\alpha}$与$\boldsymbol{\beta}$共线，即它们的对应分量成比例．实际上，这时k和l一定“全不为零”．

（4）标准单位向量组必为线性无关的向量组．

2．线性无关性的证明

利用线性无关的定义可知一个新的向量组的线性无关性．该考点是《线性代数（经管类)》历年真题考得最多的证明题考点．下面以一个具体例题，讲解证明过程．

例：若$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$线性无关，证明下列向量组线性无关：

$$\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}_3 = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2$$

证明：设存在常数k_1, k_2, k_3，使得$\underline{k_1\boldsymbol{\beta}_1 + k_2\boldsymbol{\beta}_2 + k_3\boldsymbol{\beta}_3 = 0}$．将已知条件代入得

$$\underline{k_1(\boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3) + k_2(\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_3) + k_3(\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2) = 0}$$

整理后，得

$$\underline{(k_2 + k_3)\boldsymbol{\alpha}_1 + (k_1 + k_3)\boldsymbol{\alpha}_2 + (k_1 + k_2)\boldsymbol{\alpha}_3 = 0}$$

因为$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$线性无关，则必有

$$\underline{\begin{cases} k_2 + k_3 = 0 \\ k_1 + k_3 = 0 \\ k_1 + k_2 = 0 \end{cases}}\text{，又因为其系数行列式}\underline{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0}\,,$$

所以，该齐次方程组只有零解，即$k_1 = k_2 = k_3 = 0$．故向量组$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$线性无关．

该证明题考点只要记住了证明过程，是完全可以想象为填空题的，需要改动的地方只有划线的地方．若是线性相关性的证明，则证明过程中后面方程组的系数行列式的值必为零，说明该方程组有非零解，即可得到要证明的结果．

3．向量组线性相关性的判定

（1）定义法

向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=(a_{11},a_{21},\cdots,a_{n1})^{\mathrm{T}}$，$\cdots$，$\boldsymbol{\alpha}_m=(a_{1m},a_{2m},\cdots,a_{nm})^{\mathrm{T}}$线性相关

$\Leftrightarrow$ 存在 m 个不全为零的常数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$，使得 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1,k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=0$,

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a_{11}k_1+a_{12}k_2+\cdots+a_{1m}k_n=0,\\a_{21}k_1+a_{22}k_2+\cdots+a_{2m}k_n=0,\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\a_{n1}k_1+a_{n2}k_2+\cdots+a_{nm}k_n=0,\end{cases}\text{，这 } n \text{ 个等式同时成立,}$$

$$\Leftrightarrow m\text{ 元线性方程组}\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1m}x_n=0,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2m}x_n=0,\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nm}x_n=0,\end{cases}\text{有非零解 } x_1=k_1,x_2=k_2,\cdots,x_m=k_m.$$

若上述方程组只有零解，则向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性无关.

若上述方程组有非零解，则向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性相关.

（2）重要结论及定理的应用

两个重要结论：

① n 个 n 维列向量$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$线性无关$\Leftrightarrow$矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$的行列式$|\boldsymbol{A}|=|(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)|\neq 0$．因为齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=0$只有零解当且仅当$|\boldsymbol{A}|\neq 0$.

② 当$m>n$时，即向量个数大于向量维数时，m 个 n 维列向量$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$一定线性相关.

定理 3.2.1 m个n维向量$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ $(m\geq 2)$线性相关$\Leftrightarrow$至少存在某个$\boldsymbol{\alpha}_i$是其余向量的线性组合. 即，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ $(m\geq 2)$线性无关$\Leftrightarrow$任意一个$\boldsymbol{\alpha}_i$都不能表示为其余向量的线性组合.

定理 3.2.2 如果向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性无关，而添加一个同维向量$\boldsymbol{\beta}$后所得到的向量组$\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性相关, 则$\boldsymbol{\beta}$可以用$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性表出, 且表示法是唯一的.

定理 3.2.3 若向量组中有部分组线性相关，则整体组也必相关，或者整体无关，部分必无关.

定理 3.2.4 相关组的截短向量组必为相关组，无关组的接长向量组必为无关组.

如果向量个数大于向量维数，则此向量组必是线性相关组.

当向量个数等于向量维数时，它们可拼成一个行列式，此向量组为线性相关组当且仅当此行列式为零.

当向量组的秩等于向量个数时, 它就是线性无关组；当向量组的秩小于向量个数时, 它就是线性相关组. 向量组的秩是不可能大于向量个数和向量维数的.

【典型例题】

【例 3-4】已知向量组$\boldsymbol{A}$：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$中$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性相关，那么（　　）.

A. $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性无关　　　B. $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性相关

C. α_1可由$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性表示　　D. α_3,α_4线性无关

解：答案B．向量组中有部分组线性相关，则整体组也必相关

【例 3-5】设A，B分别为$m\times n$和$m\times k$矩阵，向量组（Ⅰ）是由A的列向量构成的向量组，向量组（Ⅱ）是由（A，B）的列向量构成的向量组，则必有（　　）．

A. 若（Ⅰ）线性无关，则（Ⅱ）线性无关

B. 若（Ⅰ）线性无关，则（Ⅱ）线性相关

C. 若（Ⅱ）线性无关，则（Ⅰ）线性无关

D. 若（Ⅱ）线性无关，则（Ⅰ）线性相关

解：答案C．由向量组中整体无关，部分必无关．

【例 3-6】已知向量组$\alpha_1=(1,\ 2,\ 3)$，$\alpha_2=(3,\ -1,\ 2)$，$\alpha_3=(2,\ 3,\ k)$线性相关，则数$k=$______________．

解：答案$k=5$．由向量组线性相关可知

$$\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\ 2 & -1 & 3\\ 3 & 2 & k\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\ 0 & -7 & -1\\ 0 & -7 & k-6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\ 0 & -7 & -1\\ 0 & 0 & k-5\end{pmatrix}$$

因为矩阵的秩小于向量个数，所以$k=5$．

【同步练习及参考答案】

一、单项选择题

1．设$\alpha=(1,1,0)$，$\beta=(0,1,1)$，$\gamma=(1,0,1)$，则（　　）．

A. α，β，γ线性相关　　B. α，β，γ的秩等于1

C. α，β，γ线性无关　　D. α，β，γ的秩等于2

2．设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，则下列向量组中线性无关的是（　　）．

A. $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_1+\alpha_3$　　B. $\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_3-\alpha_1$

C. $\alpha_1,\alpha_2,2\alpha_1-3\alpha_2$　　D. $\alpha_2,2\alpha_3,2\alpha_2+\alpha_3$

3．设$\alpha_1=(1,0,0)$、$\alpha_2=(2,0,0)$、$\alpha_3=(1,1,0)$，则（　　）．

A. α_1，α_2，α_3线性无关　　B. α_3可由α_1，α_2线性表示

C. α_1可由α_2，α_3线性表示　　D. α_1，α_2，α_3的秩等于3

4．已知4×3矩阵A的列向量组线性无关，则A^{T}的秩等于（　　）．

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

5．设向量组$\alpha_1=(1,2)$，$\alpha_2=(0,2)$，$\beta=(4,2)$，则（　　）．

A. α_1，α_2，β线性无关

B. β不能由α_1，α_2线性表示

C. $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表示，但表示法不唯一

D. $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表示，且表示法唯一

6. 若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,t+1,0)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,2,0)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(0,0,t^2+1)$ 线性相关，则实数 $t=$（　　）.

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

7. 设向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=(a_1,b_1,c_1)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(a_2,b_2,c_2)$，$\boldsymbol{\beta}_1=(a_1,b_1,c_1,d_1)$，$\boldsymbol{\beta}_2=(a_2,b_2,c_2,d_2)$，下列命题中正确的是（　　）.

A. 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性相关，则必有 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 线性相关

B. 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关，则必有 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 线性无关

C. 若 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 线性相关，则必有 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关

D. 若 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 线性无关，则必有 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性相关

8. 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关，则向量组中（　　）.

A. 必有一个向量可以表为其余向量的线性组合

B. 必有两个向量可以表为其余向量的线性组合

C. 必有三个向量可以表为其余向量的线性组合

D. 每一个向量都可以表为其余向量的线性组合

9. 设有向量组 $\boldsymbol{A}$：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$，其中 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，则（　　）.

A. $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关　　B. $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关

C. $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关　　D. $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关

10. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 是三维实向量，则（　　）.

A. $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 一定线性无关　　B. $\boldsymbol{\alpha}_1$ 一定可由 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性表出

C. $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 一定线性相关　　D. $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 一定线性无关

11. 下列命题中错误的是（　　）.

A. 只含有一个零向量的向量组线性相关

B. 由 3 个 2 维向量组成的向量组线性相关

C. 由一个非零向量组成的向量组线性相关

D. 两个成比例的向量组成的向量组线性相关

12. 已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}$ 线性相关，则（　　）.

A. $\boldsymbol{\alpha}_1$ 必能由 $\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\beta}$ 线性表出　　B. $\boldsymbol{\alpha}_2$ 必能由 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\beta}$ 线性表出

C. $\boldsymbol{\alpha}_3$ 必能由 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\beta}$ 线性表出　　D. $\boldsymbol{\beta}$ 必能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出

13. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 都是 3 维向量，则必有（　　）.

A. $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关　　B. $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关

C. $\boldsymbol{\alpha}_1$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性表出　　D. $\boldsymbol{\alpha}_1$ 不可由 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性表出

14. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5$ 是四维向量，则（　　）.

A. $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5$ 一定线性无关

B. $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5$一定线性相关

C. $\boldsymbol{\alpha}_5$一定可以由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性表出

D. $\boldsymbol{\alpha}_1$一定可以由$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5$线性表出

15. 设$\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\ \boldsymbol{\alpha}_k$是 n 维列向量，则$\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\ \boldsymbol{\alpha}_k$线性无关的充分必要条件是（　　）.

A. 向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\ \boldsymbol{\alpha}_k$中任意两个向量线性无关

B. 存在一组不全为 0 的数$\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\ \boldsymbol{\alpha}_k$，使得$l_1\boldsymbol{\alpha}_1+l_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+l_k\boldsymbol{\alpha}_k\neq 0$

C. 向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\ \boldsymbol{\alpha}_k$中存在一个向量不能由其余向量线性表出

D. 向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\ \boldsymbol{\alpha}_k$中任意一个向量都不能由其余向量线性表出

16. 设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性相关，则（　　）.

A. $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$中至少有一个向量可由其他向量线性表出

B. $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$全是非零向量

C. $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$全是零向量

D. $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$中至少有一个零向量

17. 设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性相关，则必可推出（　　）.

A. $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$中至少有一个向量为零向量

B. $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$中至少有两个向量成比例

C. $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$中至少有一个向量可以表示为其余向量的线性组合

D. $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$中每一个向量都可以表示为其余向量的线性组合

18. 向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$，$(s>2)$线性无关的充分必要条件是（　　）.

A. $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$均不为零向量

B. $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$中任意两个向量不成比例

C. $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$中任意 s-1 个向量线性无关

D. $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$中任意一个向量均不能由其余 s-1 个向量线性表出

二、填空题

1. 若向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,1)^{\mathrm{T}}$与向量组$\boldsymbol{\alpha}_2=(k-1,4,2)^{\mathrm{T}}$线性相关，则 k=__________.

2. 若向量$\boldsymbol{\alpha}=(1,2,3)$与向量$\left(\dfrac{1}{2},\ b,\ \dfrac{3}{2}\right)$线性相关，则$b=$__________.

3. 向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=(k,-2,2)^{\mathrm{T}}$与向量组$\boldsymbol{\alpha}_2=(4,8,-8)^{\mathrm{T}}$线性相关，则 k=________.

4. 设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=(a,1,1)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,-2,1)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,1,-2)$线性相关，则 a=________.

5. 已知向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,3)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(2,2,2)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(3,2,a)^{\mathrm{T}}$线性相关，则$a=$________.

6. 若向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=(2,1,a)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(4,a,4)^{\mathrm{T}}$，线性无关，则 a 的取值必满足__________.

7. 若向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-2,2)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,0,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(3,k,3)^{\mathrm{T}}$线性相关，则$k=$________.

8．设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=(3,1,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(4,1,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,0,k)^{\mathrm{T}}$线性相关，则 $k=$________.

三、计算题

1．当 t 为何值时，向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,0)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,3,-1)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(5,3,t)$线性相关？

2．设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关，令$\boldsymbol{\beta}_1=-\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\beta}_2=2\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\beta}_3=2\boldsymbol{\alpha}_1-5\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3$．试确定向量组$\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，$\boldsymbol{\beta}_3$的线性相关性.

四、证明题

1．设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关，证明$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_3$也线性无关.

2．设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$线性无关，证明向量组$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2$也线性无关.

3．设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关，$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$，证明：向量组$\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，$\boldsymbol{\beta}_3$线性无关.

4.设向量$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关，证明：$2\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2,2\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2+4\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关.

5．已知向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性无关，证明：$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4$，$\boldsymbol{\alpha}_4-\boldsymbol{\alpha}_1$线性无关.

6．设向量$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_4$线性无关，证明：向量$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\beta}_4=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4$也线性无关.

7．设向量$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_k$线性无关，$1<j\leq k$．证明：$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_j,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_k$线性无关.

8．设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关，且$\boldsymbol{\beta}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3$．证明：若$k_1\neq0$，则向量组$\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$也线性无关.

9．设三阶矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$的行列式不等于 0，证明：$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\a_{31}\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\\a_{32}\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}a_{13}\\a_{23}\\a_{33}\end{pmatrix}$线性无关.

10. 证明：若向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$线性无关，而$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots$，$\boldsymbol{\beta}_n=\boldsymbol{\alpha}_{n-1}+\boldsymbol{\alpha}_n$，则向量组$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$线性无关的充要条件是 n 为奇数.

11．证明任意 4 个 3 维向量组线性相关.

12．设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$是四维向量，且线性无关，证明$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\beta}_4=\boldsymbol{\alpha}_4+\boldsymbol{\alpha}_1$线性相关.

13．设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性相关，且其中任意两个向量都线性无关．证明：存在全不为零的常数k_1,k_2,k_3使得$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3=0$.

参考答案

一、单项选择题

1. C　2. A　3. C　4. C　5. D　6. B　7. B　8. A　9. A
10. C　11. C　12. D　13. B　14. B　15. D　16. A　17. C　18. D

二、填空题

1. 3　2. 1　3. -1　4. -2　5. 1　6. $a \neq 2$　7. -2　8. -1

三、计算题

1. 1　2. 线性无关

四、证明题

1. 证明：设存在一组常数 k_1, k_2, k_3，使得 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2(\boldsymbol{\alpha}_1 + 2\boldsymbol{\alpha}_2) + k_3(\boldsymbol{\alpha}_1 + 3\boldsymbol{\alpha}_3) = 0$,

即 $(k_1 + k_2 + k_3)\boldsymbol{\alpha}_1 + 2k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + 3k_3\boldsymbol{\alpha}_3 = 0$. 由于 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关, 则必有 $\begin{cases} k_1 + k_2 + k_3 = 0 \\ 2k_2 = 0 \\ 3k_3 = 0 \end{cases}$,

解得此方程组只有唯一零解：$k_1 = k_2 = k_3 = 0$，故向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_1 + 2\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_1 + 3\boldsymbol{\alpha}_3$ 也线性无关.

2. 证明：设存在一组常数 k_1, k_2，使得 $k_1\boldsymbol{\beta}_1 + k_2\boldsymbol{\beta}_2 = 0$

即 $k_1(\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2) + k_2(\boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_2) = (k_1 + k_2)\boldsymbol{\alpha}_1 + (k_1 - k_2)\boldsymbol{\alpha}_2 = 0$

由于 $\boldsymbol{\alpha}_1$， $\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关，则必有 $\begin{cases} k_1 + k_2 = 0 \\ k_1 - k_2 = 0 \end{cases}$,

解得此方程组只有唯一零解：$k_1 = k_2 = 0$，向量组 $\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2$， $\boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_2$ 也线性无关.

3. 证明：设存在一组常数 k_1, k_2, k_3，使得 $k_1\boldsymbol{\beta}_1 + k_2\boldsymbol{\beta}_2 + k_3\boldsymbol{\beta}_3 = 0$

即 $k_1(\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2) + k_2(\boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3) + k_3(\boldsymbol{\alpha}_3 + \boldsymbol{\alpha}_1) = (k_1 + k_3)\boldsymbol{\alpha}_1 + (k_1 + k_2)\boldsymbol{\alpha}_2 + (k_2 + k_3)\boldsymbol{\alpha}_3 = 0$

由于 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，则必有 $\begin{cases} k_1 + k_3 = 0 \\ k_1 + k_2 = 0 \\ k_2 + k_3 = 0 \end{cases}$,

解得此方程组只有唯一零解：$k_1 = k_2 = k_3 = 0$，向量组 $\boldsymbol{\beta}_1$， $\boldsymbol{\beta}_2$， $\boldsymbol{\beta}_3$ 线性无关.

4. 证明：设存在一组常数 k_1, k_2, k_3，使得 $k_1(2\boldsymbol{\alpha}_1 - 2\boldsymbol{\alpha}_2) + k_2(2\boldsymbol{\alpha}_1 - 2\boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3) + k_3(\boldsymbol{\alpha}_2 + 4\boldsymbol{\alpha}_3) = 0$,

即 $(2k_1 + 2k_2)\boldsymbol{\alpha}_1 + (-2k_1 - 2k_2 + k_3)\boldsymbol{\alpha}_2 + (k_2 + 4k_3)\boldsymbol{\alpha}_3 = 0$. 由于 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，则必有

$$\begin{cases}2k_1+2k_2=0\\-2k_1-2k_2+k_3=0\\k_2+4k_3=0\end{cases},$$

解得此方程组只有唯一零解：$k_1=k_2=k_3=0$，故向量组 $2\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2, 2\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$, $\boldsymbol{\alpha}_2+4\boldsymbol{\alpha}_3$ 也线性无关.

5．证明：设存在一组常数 k_1,k_2,k_3,k_4，使得 $k_1(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)+k_2(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)+k_3(\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4)+k_4(\boldsymbol{\alpha}_4-\boldsymbol{\alpha}_1)=0$

即 $(k_1-k_4)\boldsymbol{\alpha}_1+(k_1+k_2)\boldsymbol{\alpha}_2+(k_2+k_3)\boldsymbol{\alpha}_3+(k_3+k_4)\boldsymbol{\alpha}_4=0$

由于 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关，则必有 $\begin{cases}k_1-k_4=0\\k_1+k_2=0\\k_2+k_3=0\\k_3+k_4=0\end{cases}$,

解此方程组只有唯一零解：$k_1=k_2=k_3=k_4=0$，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4$，$\boldsymbol{\alpha}_4-\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性无关.

6．证明：设存在一组常数 k_1, k_2, k_3, k_4，使得 $k_1\boldsymbol{\beta}_1+k_2\boldsymbol{\beta}_2+k_3\boldsymbol{\beta}_3+k_4\boldsymbol{\beta}_4=0$，即

即 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)+k_3(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)+k_3(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4)=0$,

$(k_1+k_2+k_3+k_4)\boldsymbol{\alpha}_1+(k_2+k_3+k_4)\boldsymbol{\alpha}_2+(k_3+k_4)\boldsymbol{\alpha}_3+k_4\boldsymbol{\alpha}_4=0$,

由于 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关，则必有 $\begin{cases}k_1+k_2+k_3+k_4=0\\k_2+k_3+k_4=0\\k_3+k_4=0\\k_4=0\end{cases}$，解得：$k_1=k_2=k_3=k_4=0$,

故向量组 $\boldsymbol{\beta}_1$, $\boldsymbol{\beta}_2$, $\boldsymbol{\beta}_3$, $\boldsymbol{\beta}_4$ 也线性无关.

7．证明：设存在一组常数 $l_1, l_2, \cdots, l_k$，使得 $l_1(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_j)+l_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+l_k\boldsymbol{\alpha}_k=0$,

即 $l_1\boldsymbol{\alpha}_1+l_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+(l_1+l_j)\boldsymbol{\alpha}_j+\cdots+l_k\boldsymbol{\alpha}_k=0$．由于 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_k$ 线性无关,

所以 $l_1=l_2=\cdots=l_1+l_j=\cdots l_k=0$，等价于 $\boldsymbol{Al}=\begin{pmatrix}1&&&&&\\&1&&&&\\&&\ddots&&&\\1&&&1&&\\&&&&\ddots&\\&&&&&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}l_1\\l_2\\\vdots\\l_j\\\vdots\\l_k\end{pmatrix}=0$,

又因为系数矩阵 $|\boldsymbol{A}|=1\neq0$，则上述齐次线性方程组只有零解，即 $l_1=l_2=\cdots=l_j=\cdots l_k=0$

故$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_j,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_k$也线性无关.

8．证明：设存在一组常数a_1,a_2,a_3，使得$a_1\boldsymbol{\beta}+a_2\boldsymbol{\alpha}_2+a_3\boldsymbol{\alpha}_3=0$

即$a_1(k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3)+a_2\boldsymbol{\alpha}_2+a_3\boldsymbol{\alpha}_3=a_1k_1\boldsymbol{\alpha}_1+(a_1k_2+\boldsymbol{\alpha}_2)\boldsymbol{\alpha}_2+(a_1k_3+\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{\alpha}_3=0$

由于$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关，则必有$\begin{cases}a_1k_1=0\\a_1k_2+\boldsymbol{\alpha}_2=0\\a_1k_3+\boldsymbol{\alpha}_3=0\end{cases}$，若$k_1\neq 0$,

解得此方程组只有唯一零解：$a_1=a_2=a_3=0$，向量组$\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$也线性无关.

9．证明：设存在一组常数k_1，k_2，k_3，使得$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3=0$,

即$(\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\k_3\end{pmatrix}=0$，亦即$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\k_3\end{pmatrix}=0$，则$\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\k_3\end{pmatrix}$为$\boldsymbol{Ax}=0$的解．又因为$\boldsymbol{A}$的行列式不等于0,

所以方程组$\boldsymbol{Ax}=0$只有零解，从而$k_1=k_2=k_3=0$，故$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关.

所以$l_1=l_2=\cdots=l_1+l_j=\cdots l_k=0$，等价于$\boldsymbol{Al}=\begin{pmatrix}1&&&&&\\&1&&&&\\&&\ddots&&&\\1&&&1&&\\&&&&\ddots&\\&&&&&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}l_1\\l_2\\\vdots\\l_j\\\vdots\\l_k\end{pmatrix}=0$,

又因为系数矩阵$|\boldsymbol{A}|=1\neq 0$，则上述齐次线性方程组只有零解，即$l_1=l_2=\cdots=l_j=\cdots l_k=0$

故$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_j,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_k$也线性无关.

10．证明：根据向量组$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$的表达式，可将其改写为

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)=\begin{pmatrix}1&0&0&\cdots&0&1\\1&1&0&\cdots&0&0\\0&1&1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1&0\\0&0&0&\cdots&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\\boldsymbol{\alpha}_2\\\boldsymbol{\alpha}_3\\\vdots\\\boldsymbol{\alpha}_{n-1}\\\boldsymbol{\alpha}_n\end{pmatrix},$$

因为$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots\boldsymbol{\alpha}_n$线性无关, 所以$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$线性无关$\Leftrightarrow$向量组$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$与向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots\boldsymbol{\alpha}_n$等价

$$\Leftrightarrow \text{矩阵}\begin{pmatrix}1&0&0&\cdots&0&1\\1&1&0&\cdots&0&0\\0&1&1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1&0\\0&0&0&\cdots&1&1\end{pmatrix}\text{可逆}\Leftrightarrow\text{行列式}\begin{vmatrix}1&0&0&\cdots&0&1\\1&1&0&\cdots&0&0\\0&1&1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1&0\\0&0&0&\cdots&1&1\end{vmatrix}=1+(-1)^{n+1}\neq 0\Leftrightarrow n$$

为奇数.

11．证明：设$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}a_{11}\\a_{12}\\a_{13}\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}a_{21}\\a_{22}\\a_{23}\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}a_{31}\\a_{32}\\a_{33}\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{bmatrix}a_{41}\\a_{42}\\a_{43}\end{bmatrix}$，为任意四个三维向量，

向量组 $\boldsymbol{A}$：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性相关$\Leftrightarrow \mathrm{r}(\boldsymbol{A})<4$，而$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)\leqq 3<4$，

所以$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性相关，由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$假设的任意性，即命题成立.

12．证明：设存在一组常数k_1，k_2，k_3，k_4，使得$k_1\boldsymbol{\beta}_1+k_2\boldsymbol{\beta}_2+k_3\boldsymbol{\beta}_3+k_4\boldsymbol{\beta}_4=0$，即

$k_1(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)+k_2(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)+k_3(\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4)+k_4(\boldsymbol{\alpha}_4+\boldsymbol{\alpha}_1)=(k_1+k_4)\boldsymbol{\alpha}_1+(k_1+k_2)\boldsymbol{\alpha}_2+(k_2+k_3)\boldsymbol{\alpha}_3+(k_3+k_4)\boldsymbol{\alpha}_4=0$，

由于$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性无关，所以$\begin{cases}k_1+k_4=0\\k_1+k_2=0\\k_2+k_3=0\\k_3+k_4=0\end{cases}$，其系数行列式$\begin{vmatrix}1&0&0&1\\1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\end{vmatrix}=0$，故存在非零解，

即k_1，k_2，k_3，k_4不全为零，所以$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$线性相关.

13．证明：由于向量组$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$线性相关，故存在不全为零的常数k_1，k_2，k_3，使得$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3=0$，其中必有$k_1\neq 0$，否则，如果$k_1=0$，

则上式化为$k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3=0$，其中$k_2,k_3$不全为零，由此推出线性相关，与向量组中任意两个向量都线性无关的条件矛盾．类似地$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$，可证明$k_2\neq 0$，$k_3\neq 0$.

故存在全不为零的常数k_1，k_2，k_3使得$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3=0$

考点 3　向量组的秩与极大无关组

【考点内容】

1．向量组的等价

定义 3.3.1 设有两个 n 维向量组

$$\boldsymbol{R}=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r\},\quad S=\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s\}.$$

若向量组 $\boldsymbol{R}$ 中的每个向量 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 都可以由向量组 $\boldsymbol{S}$ 中的向量 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2,\cdots, \boldsymbol{\beta}_s$ 线性表出，则称向量组 $\boldsymbol{R}$ 可以由向量组 $\boldsymbol{S}$ 线性表出.

定义 3.3.2 若向量组 $\boldsymbol{R}$ 可以由向量组 $\boldsymbol{S}$ 线性表出，向量组 $\boldsymbol{S}$ 也可以由向量组 $\boldsymbol{R}$ 线性表出，则称这两个向量组等价.

2．向量组的极大无关组

定义 3.3.3 设 $\boldsymbol{T}$ 是由若干个（有限或无限多个）n 维向量组成的向量组，若存在 $\boldsymbol{T}$ 的一个部分组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2,\cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 满足以下条件：

（1）$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2,\cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关；

（2）对于任意一个向量 $\boldsymbol{\beta}\in T$，向量组 $\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2,\cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 都线性相关，则称 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2,\cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 为 $\boldsymbol{T}$ 的一个**极大线性无关向量组**，简称**极大无关组.**

可以这样理解 $\boldsymbol{S}=\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2,\cdots, \boldsymbol{\alpha}_r\}$ 在 $\boldsymbol{T}$ 中的“极大性”：对于“无关性”来说，$\boldsymbol{S}$ 在 $\boldsymbol{T}$ 中已经“饱和”了，即 $\boldsymbol{S}$ 本身是线性无关组，在 $\boldsymbol{S}$ 中再任意添加 $\boldsymbol{T}$ 中的一个向量 $\boldsymbol{\beta}$，就成为线性相关组了. 总之, 若将一个向量组与它的极大无关组看成整体和部分关系的话，那它的极大无关组就是能够线性表出整体向量组的一个部分线性无关组.

定理 3.3.1 向量组 $\boldsymbol{T}$ 与它的任意一个极大无关组等价，因而 $\boldsymbol{T}$ 的任意两个极大无关组等价.

定理 3.3.2 设有两个 n 维向量组 $\boldsymbol{R}=\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2,\cdots, \boldsymbol{\alpha}_r\}$和 $\boldsymbol{S}=\{\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2,\cdots, \boldsymbol{\beta}_s\}$，且已知向量组 $\boldsymbol{R}$ 可由向量组 $\boldsymbol{S}$ 线性表出.

（1）如果 $r > s$，则 $\boldsymbol{R}$ 必为线性相关组.

（2）如果 $\boldsymbol{R}$ 为线性无关组，则必有 $r\leq s$.

该定理说明：两个向量组，若所含向量个数多的向量组能由所含向量个数少的向量组线性表出，则所含向量个数多的向量组必线性相关. 一个线性无关组只能由所含向量个数相同或所含向量个数更多的向量组线性表出.

推论 1 任意两个线性无关的等价向量组所含向量的个数相等.

推论 2 一个向量组的任意两个极大线性无关组所含向量的个数相同.

注意：一个向量组的极大无关组虽然不唯一，但它的任意两个极大线性无关组所含向量的个数相同.

3．向量组的秩

定义 3.3.4 向量组 $\boldsymbol{T}$ 的任意一个极大无关组中所含向量的个数 r 称为 $\boldsymbol{T}$ 的秩，记为 $\mathrm{r}(\boldsymbol{T})$，或者秩$(\boldsymbol{T})$.

仅由零向量组成的向量组$\{0\}$不含极大无关组，我们规定向量组$\{0\}$的秩为 0.

只要 $\boldsymbol{T}$ 中有非零向量，则必有 $\mathrm{r}(\boldsymbol{T})\geq 1$. 所以任意一个向量组必有秩，而且 $\mathrm{r}(\boldsymbol{T})\leq n$（其中 n 是向量的维数）. 若向量组 $\boldsymbol{R}=\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2,\cdots, \boldsymbol{\alpha}_r\}$是线性无关的，则它的极大无关组只有它本身一个，所以秩$(\boldsymbol{R}) = r$.

当一个向量组的秩为 r 时，则它的任意一个含 r 个向量的线性无关组，都是它的极

大无关组.

定理 3.3.3 如果向量组 $\boldsymbol{S}$ 可由向量组 $\boldsymbol{T}$ 线性表出，其秩分别为 $\mathrm{r}(\boldsymbol{S})=s$，$\mathrm{r}(\boldsymbol{T})=t$，则 $s\le t$.

该定理说明：两个向量组，谁能线性表出谁，谁的秩就大.

推论：等价的向量组必有相同的秩.

4．求向量组的秩与极大无关组，并将其余的向量表示成该极大无关组的线性组合.

该考点是历年真题中考核最为固定、且方法最为固定的一个考核知识点. 具体求解思路如下：

先将所给的向量组按列（若为行向量要取转置）排成一个矩阵 $\boldsymbol{A}$，然后将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 化为行最简形矩阵 $\boldsymbol{T}$，以向量组的秩为 3 为例，说明将拼成的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 化为行最简形矩阵 $\boldsymbol{T}$ 的步骤：

（1）用变换 1, 2 将元素 a_{11} 化为 1 (没必要一定化为 1，只要下方的元素是 a_{11} 的整数倍即可，最后再化为 1)；

（2）再用变换 3 将 a_{11} 下方的元素化为 0；

（3）用变换 1, 2 将元素 a_{22} 化为 1 (没必要一定化为 1，只要下方的元素是 a_{22} 的整数倍即可，最后再化为 1)；

（4）再用变换 3 将 a_{22} 下方的元素化为 0；

（5）用变换 2 将元素 a_{33} 化为 1 (有时也可能是 a_{44}，即第三列无主元，同时没必要一定化为 1，只要上方的元素是 a_{33} 的整数倍即可，最后再化为 1)；

（6）再用变换 3 将 a_{33} 上方的元素化为 0；

（7）再用变换 3 将 a_{22} 上方的元素化为 0；

（8）最后若 a_{11}，a_{22}，a_{33} 中的元素有不为 1 的，再用变换 2 将其化为 1，这时就将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 化成了行最简形矩阵.

则①向量组的秩就等于行最简形矩阵 $\boldsymbol{T}$ 的非零行行数（或主元个数），②向量组的极大无关组为主元所在列对应的原来向量构成，③无主元的列对应的原来向量就为其余向量，可由该极大无关组线性表出，其表出系数为行最简形矩阵 $\boldsymbol{T}$ 中对应列的元素.

【典型例题】

【例 3-7】向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的秩为 r，且 $r<s$，则（　　）.

A. $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关

B. $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中任意 r 个向量线性无关

C. $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中任意 $r+1$ 个向量线性相关

D. $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中任意 r-1 个向量线性无关

解：答案 C 向量组的秩为 r 即极大无关组中线性无关向量个数为 r，因此任意 $r+1$

个向量线性相关

【例 3-8】已知向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}t\\1\\1\end{pmatrix}$的秩为 2，则数 t=__________.

解：答案为-2．已知向量组的秩为 2 由

$$\begin{pmatrix}1&1&t\\1&-2&1\\-2&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&t\\0&-3&1-t\\0&3&1+2t\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&t\\0&-3&1-t\\0&0&t+2\end{pmatrix}$$ 可知$t=-2$.

【例 3-9】设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,3)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(4,5,6)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(3,3,3)$与向量组$\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，$\boldsymbol{\beta}_3$等价，则向量组$\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，$\boldsymbol{\beta}_3$的秩为 __________.

解：答案为 2 向量组等价秩相等．由$\mathrm{r}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=2$知向量组$\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，$\boldsymbol{\beta}_3$的秩为 2.

【例 3-10】设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1$=(1,2,3,6)，$\boldsymbol{\alpha}_2$=（1,-1,2,4)，$\boldsymbol{\alpha}_3$=(-1,1,-2,-8)，$\boldsymbol{\alpha}_4$=(1,2,3,2).

（1）求该向量组的秩与一个极大线性无关组；

（2）将其余向量表示为该极大线性无关组的线性组合.

解：$$\begin{pmatrix}1&1&-1&1\\2&-1&1&2\\3&2&-2&3\\6&4&-8&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-1&1\\0&-3&3&0\\0&-1&1&0\\0&-2&-2&-4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-1&1\\0&1&-1&0\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

（1）向量组的秩为 3，一个极大无关组为$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$.

（2）$\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3$.

【同步练习及参考答案】

一、单项选择题

1．向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$的秩不为 s (s≥2)的充分必要条件是（　　）.

A．$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 全是非零向量

B．$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 全是零向量

C．$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中至少有一个向量可由其他向量线性表出

D．$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中至少有一个零向量

2．向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,0)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,4,0)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(3,6,0)$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(4,9,0)$的极大线性无关组为（　　）.

A．$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_4$　　B．$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_3$　　C．$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$　　D．$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$

3．向量组$\boldsymbol{\alpha}_1$=(1,0,0)，$\boldsymbol{\alpha}_2$=(1,1,0)，$\boldsymbol{\alpha}_3$=(1,1,1)的秩为（　　）.

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

4. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&2&0\\3&4&0\end{pmatrix}$，那么矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组的秩为（　　）.

A. 3　　B. 2　　C. 1　　D. 0

5. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$,$\boldsymbol{\alpha}_4$ 是一个 4 维向量组, 若已知 $\boldsymbol{\alpha}_4$ 可以表为 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 的线性组合，且表示法唯一，则向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$,$\boldsymbol{\alpha}_4$ 的秩为（　　）.

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

6. 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 的秩为 2，则 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 中（　　）.

A. 必有一个零向量

B. 任意两个向量都线性无关

C. 存在一个向量可由其余向量线性表出

D. 每个向量均可由其余向量线性表出

7. 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s(s\geq 2)$ 的秩不为零的充分必要条件是（　　）.

A. $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中没有线性相关的部分组

B. $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中至少有一个非零向量

C. $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 全是非零向量

D. $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 全是零向量

二、填空题

1. 矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1&0\\1&3\\1&6\end{pmatrix}$ 的行向量组的秩为____________.

2. 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,0)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,0)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(-5,2,0)$的秩是____________.

3. 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,0)$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,0)$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(1,1,1)$ 的秩为____________.

4. 设有向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,-2)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(3,0,7)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(2,0,6)$，则 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 的秩是________.

5. 已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\2\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\5\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}2\\1\\t+2\\4\end{pmatrix}$ 的秩为 2，则 $t=$__________.

6. 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,0,2)$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,1,0)$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(0,1,-1,2)$ 的秩为______________.

7. 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,0)^{\mathrm{T}}$，且 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2$，则向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 的秩为__________.

8. 向量组(1,2)，(2,3)，(3,4)的秩为______________.

9. 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1,1)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,2,3,4)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(0,1,2,3)$的秩为______________.

10. 已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,-1,1)$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(2,0,t,0)$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(-1,2,-4,1)$ 的秩为 2，则数

$t=$____________.

11．设线性无关的向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$可由向量组$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$线性表示，则$r$与$s$的关系为_______.

三、计算题

1．求向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,4,3,-2)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,5,4,-1)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(3,9,7,-3)$的秩.

2．若向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}2\\6\\-k\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}-2\\0\\-2k\end{pmatrix}$的秩为2，求$k$的值.

3．求向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}6\\2\\6\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}-2\\4\\5\end{pmatrix}$的秩与一个极大线性无关组.

4．求向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1,3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,-3,5,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(3,2,-1,4)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(-2,-6,10,2)^{\mathrm{T}}$的秩和一个极大线性无关组.

5．求向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,2,4)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(0,3,1,2)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(3,0,7,14)$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(2,1,5,6)$，$\boldsymbol{\alpha}_5=(1,-1,2,0)$的一个极大无关组.

6．求向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,1,3)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(4,-1,-5,-6)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,-3,-4,-7)$的秩和其一个极大线性无关组.

7．设向量组为$\boldsymbol{\alpha}_1=(2,0,-1,3)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(3,-2,1,-1)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(-5,6,-5,9)$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(4,-4,3,-5)$，求向量组的秩，并给出一个极大线性无关组.

8．求向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=$（1, 2 , -1, 4），$\boldsymbol{\alpha}_2=(9, 100, 10, 4)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=$（-2, -4, 2, -8）的秩和一个极大无关组.

9．求向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=(1, 2, 1, 0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1, 1, 1, 2)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(3, 4, 3, 4)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(4, 5, 6, 4)^{\mathrm{T}}$的秩与一个极大线性无关组.

10．设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\-4\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}2\\4\\6\\3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\\1\end{pmatrix}$，求该向量组的秩和一个极大线性无关组.

11．设$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,2,3),\boldsymbol{\alpha}_2=(1,-1,1,1),\boldsymbol{\alpha}_3=(1,3,3,5),\boldsymbol{\alpha}_4=(4,-2,5,6),\boldsymbol{\alpha}_5=(-3,-1,-5,-7)$，试求向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5$的秩和一个极大无关组.

12．求向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=(-1,2,0,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,2,0,5)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(3,2,2,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(0,4,0,6)^{\mathrm{T}}$，的秩和一个极大线性无关组.

13．设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,2,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,-2,4,-2)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(3,0,6,-1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(0,3,0,-4)^{\mathrm{T}}$，

（1）求向量组的一个极大线性无关组；（2）将其余向量表为该极大线性无关组的线

性组合.

14．设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,2,4)^{\mathrm{T}}$， $\boldsymbol{\alpha}_2=(0,3,1,2)^{\mathrm{T}}$， $\boldsymbol{\alpha}_3=(3,0,7,14)^{\mathrm{T}}$， $\boldsymbol{\alpha}_4=(1,-1,2,0)^{\mathrm{T}}$，求向量组的秩和一个极大线性无关组，并将其余向量用该极大线性无关组线性表示.

15．求向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1,3)^{\mathrm{T}}$， $\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,-3,5,1)^{\mathrm{T}}$， $\boldsymbol{\alpha}_3=(3,2,-1,4)^{\mathrm{T}}$， $\boldsymbol{\alpha}_4=(-2,-6,10,2)^{\mathrm{T}}$ 的一个极大无关组，并将向量组中的其余向量用该极大无关组线性表出.

16．设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,4,1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(2,1,-1,-3)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(1,0,-3,-1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_4=(0,2,-6,3)^{\mathrm{T}}$，求该向量组的秩及一个极大无关组，并将其余向量用此极大无关组线性表示.

17．求向量组：$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\-2\\3\\-1\\2\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}2\\1\\2\\-2\\-3\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}5\\0\\7\\-5\\-4\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}3\\-1\\5\\-3\\-1\end{pmatrix}$ 的秩，并给出该向量组的一个极大无关组，同时将其余的向量表示成该极大无关组的线性组合.

18．设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(2,1,3,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(1,2,0,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(-1,1,-3,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_4=(1,1,1,1)^{\mathrm{T}}$ 求向量组的秩及一个极大线性无关组，并用该极大线性无关组表示向量组中的其余向量.

19．求向量组：$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\-2\end{pmatrix}$， $\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}2\\5\\-6\\-5\end{pmatrix}$， $\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}3\\1\\1\\1\end{pmatrix}$， $\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}-1\\2\\-7\\-3\end{pmatrix}$ 的一个极大线性无关组，并将其余向量通过该极大线性无关组表示出来.

20．设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(3,1,2,0),\ \boldsymbol{\alpha}_2=(0,7,1,3),\ \boldsymbol{\alpha}_3=(-1,2,0,1),\ \boldsymbol{\alpha}_4=(6,9,4,3)$，求其一个极大线性无关组，并将其余向量通过极大线性无关组表示出来.

21．求向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(2,4,2),\ \boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,0),\ \boldsymbol{\alpha}_3=(2,3,1),\ \boldsymbol{\alpha}_4=(3,5,2)$ 的一个极大无关组，并把其余向量用该极大无关组表示.

22．求向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,2,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,-1,-2,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(-3,4,-4,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(-6,14,-6,3)^{\mathrm{T}}$ 的秩和一个极大线性无关组，并将向量组中的其余向量由该极大线性无关组线性表出.

23．求向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,2,1)^{\mathrm{T}}$， $\boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,1,2)^{\mathrm{T}}$， $\boldsymbol{\alpha}_3=(0,2,0,1)^{\mathrm{T}}$， $\boldsymbol{\alpha}_4=(-1,0,-3,-1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_5=(4,-1,5,7)^{\mathrm{T}}$ 的秩和一个极大线性无关组，并将其余向量由该极大线性无关组线性表出.

24．求向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,5,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(-1,3,-6)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(3,-1,10)^{\mathrm{T}}$ 的秩和一个极大线性无关组，并将向量组中的其余向量由该极大线性无关组线性表出.

25．已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,-1,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,0,t,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(0,-4,5,-2)^{\mathrm{T}}$， $\boldsymbol{\alpha}_4=(3,-2,t+4,-1)^{\mathrm{T}}$（其中 t 为参数），求向量组的秩和一个极大无关组.

26．设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1,3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,-3,5,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(3,2,-1,p+2)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(-2,-6,10,p)^{\mathrm{T}}$，

问 p 为何值时，该向量组线性相关？并在此时求出它的秩和一个极大无关组.

参考答案

一、单项选择题

1. C　2. A　3. C　4. B　5. C　6. C　7. B

二、填空题

1. 2　2. 2　3. 3　4. 2　5. 3　6. 2　7. 2　8. 2　9. 2　10. 3

11. $r \leq s$

三、计算题

1. 2　2. 2　3. 2; α_1,α_2　4. 3；$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$　5. $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$　6. 2；α_1,α_2

7. 2；α_1,α_2　8. 2；α_1,α_2　9. 3；$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$　10. 3；$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$

11. 2; α_1,α_2　12. 3；$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$　13. $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$，$\alpha_4=-3\alpha_1+\alpha_3$

14. 3；$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$．$\alpha_3=3\alpha_1+\alpha_2$　15. $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$，$\alpha_4=2\alpha_2$

16. 3；$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$．$\alpha_4=\alpha_1-2\alpha_2+3\alpha_3$　17. 2；α_1,α_2；$\alpha_3=\alpha_1+2\alpha_2$，$\alpha_4=\alpha_1+\alpha_2$

18. 3；$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$．$\alpha_3=-\alpha_1+\alpha_2$　19. $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$，$\alpha_4=-\frac{5}{2}\alpha_1+\frac{3}{2}\alpha_2-\frac{1}{2}\alpha_3$

20. $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$，$\alpha_4=\alpha_1+2\alpha_2-3\alpha_3$　21. α_1,α_2．$\alpha_3=\frac{1}{2}\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_4=\alpha_1+\alpha_2$

22. 3；$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$，$\alpha_4=\alpha_1-2\alpha_2+3\alpha_3$

23. 3；$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$，$\alpha_4=-2\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3$，$\alpha_5=\alpha_1+3\alpha_3$

24. 2；α_1,α_2，$\alpha_3=-11\alpha_1+5\alpha_2$，$\alpha_4=17\alpha_1-7\alpha_2$

25. 当 $t=3$ 时，秩为 2，α_1,α_2 为其一个极大无关组；当 $t\neq 3$ 时，秩为 3，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为其一个极大无关组.

26. $p=2$ 时，秩为 3，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为一个极大无关组.

考点 4　向量空间

【考点内容】

1. 向量空间的概念

定义 3.4.1　n 维实行向量全体（或实列向量全体）构成的集合称为实 n 维向量空间，记作 $\mathbf{R}^n$.

定义 3.4.2 设 V 是 n 维向量构成的非空集合，且满足

（1）若 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V$，则 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\in V$；

（2）若 $\boldsymbol{\alpha}\in V$，$k\in\mathbf{R}$，则 $k\boldsymbol{\alpha}\in V$.

则称集合 V 是 $\mathbf{R}^n$ 的子空间. 为了叙述方便，我们有时也把 $\mathbf{R}^n$ 的子空间简称为向量空间.

定义 3.4.2 中的条件（1）称为 V 对向量的加法运算封闭，条件（2）称为 V 对数乘运算封闭. 由于空间的非空性和对加法的封闭性及对数乘的封闭性易见，在任意一个子空间 V 中一定包含零向量.

上述两个条件可以合并成以下两个条件：

对任意向量 $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}\in V$ 和任意常数 k，$l\in\mathbf{R}$，都有 $k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\beta}\in V$.

$\mathbf{R}^n$ 的子集 $V=\{0\}$是最简单的子空间. 因为零向量加零向量仍是零向量，零向量乘任意数后仍是零向量，称 $V=\{0\}$是零子空间.

2．生成子空间

一般的，任意取定向量组 $\alpha1, \alpha2,\cdots, \alpha m\in \mathrm{R}n$，则可证明由它们的线性组合全体所组成的向量集合

$$V=\{\boldsymbol{\alpha}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots, k_m\boldsymbol{\alpha}_m|\,\forall\, k_i\in\mathbf{R},\quad i=1, 2,\cdots, m\}$$

一定是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个子空间，记为 $V=L(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2,\cdots, \boldsymbol{\alpha}_m)$. 并称它为由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2,\cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 生成的子空间.

3．向量空间的维数以及坐标

定义 3.4.3 设 V 是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个向量空间，若 V 中的向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2,\cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 满足：

（1）$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2,\cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关;

（2）V 中的任意一个向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 都可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2,\cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性表出, 即存在常数 $k_1, k_2,\cdots, k_r\in\mathbf{R}$，使得

$$\boldsymbol{\alpha}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{\alpha}_r,$$

则称向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2,\cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 为 V 的一个基，其中每个 $\boldsymbol{\alpha}_i\,(I=1, 2,\cdots, r)$都称为基向量．基中所含向量的个数 r 称为 V 的维数，记为 $\dim V=r$，并称 V 为 r 维向量空间.

由基的定义可知，向量空间 V 的一个基，实际上就是向量集合 V 中的一个极大线性无关组，V 的维数就是极大无关组中所含向量的个数，也即 V 的秩. 因此向量空间的维数是不变的，它不会随基的改变而改变.

注意

（1）V 中每个向量的维数 n 是指向量中的分量个数. 向量空间 V 维数 r 是指 V 的基中的基向量的个数．这是两个不同的概念．r 维向量空间 V 的任意两个基都是等价的线性无关组，它们都含有 r 个向量，且必有 $r\leq n$.

（2）若 $\dim V=r$，则 V 中 r 个向量的集合 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2,\cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 是 V 的基 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2,\cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 为线性无关组.

于是，易得 $\dim\mathbf{R}^n=n$，$\dim V=0\Leftrightarrow V=\{0\}$，$\dim(L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m))=\mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)$，$\dim V$ = 空间 V 中的向量的分量可自由取值的个数.

定理 3.4.1 设 S: $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 是向量空间 V 的一个基，则 V 中的任意一个向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 都可以用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 唯一地线性表出.

当 $\boldsymbol{\alpha}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{\alpha}_r$ 成立时，由 r 个表出系数组成的 r 维向量$(k_1,k_2,\cdots,k_r)$称为向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 在此基 S 下的坐标.

当然，同一个向量在不同的基下有不同的坐标，求坐标的方法就是求出系数，也就是解线性方程组.

【典型例题】

【例 3-11】实数向量空间 $\boldsymbol{V}=\{(x_1,x_2,x_3)\,|x_1+x_2+x_3=0\}$的维数是____________.

解：答案为 2．因为空间 $\boldsymbol{V}$ 中的向量(x_1,x_2,x_3)中的分量，实际可自由取值个数是 2.

【例 3-12】已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,2,0)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(3,0,0)$是 $\mathbf{R}^3$ 的一组基，则向量 $\boldsymbol{\beta}=(8,7,3)$在这组基下的坐标是____________.

解：答案为$(3,2,1)$．由

$$\begin{pmatrix}1&1&3&8\\1&2&0&7\\1&0&0&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&3&8\\0&1&-3&-1\\0&-1&-3&-5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&3&8\\0&1&-3&-1\\0&0&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&3\\0&1&0&2\\0&0&1&1\end{pmatrix}.$$

【同步练习及参考答案】

一、单项选择题

1．实数向量空间 $\boldsymbol{V}=\{(x_1,x_2,x_3)\,|\,x_1+x_3=0\}$ 的维数是（　　）.

A．0　　B．1　　C．2　　D．3

2．实数向量空间 $\boldsymbol{V}=\{(x,y,z)\,|\,3x+2y+5z=0\}$ 的维数是（　　）.

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

3．向量空间 $\boldsymbol{V}=\{(\boldsymbol{a},2\boldsymbol{a},3\boldsymbol{a})\,|\,\boldsymbol{a}\text{为任意实数}\}$ 的维数是（　　）.

A．0　　B．1　　C．2　　D．3

二、填空题

1．实向量空间 $\boldsymbol{R}^n$ 的维数是______________.

2．向量空间 $\boldsymbol{V}=\{x=(x_1,\ x_2,\ 0)^{\mathrm{T}}|x_1,\ x_2\in\mathbf{R}\}$的维数为______________.

3．向量空间 $\boldsymbol{V}=\{x=(x_1,x_2,0)|\,x_1,x_2\text{ 为实数}\}$的维数为______________.

4．实数向量空间 $\boldsymbol{V}=\{(x_1,x_2,x_3)|\,x_1-x_2+x_3=0\}$的维数为________________.

5．设$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}-2\\-2\\0\end{pmatrix}$，则由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$所生成的线性空间$\boldsymbol{L}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$的维数是__________.

三、计算题

1．求向量$\boldsymbol{\beta}=(3,-1,2)^{\mathrm{T}}$在基$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,2)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,3,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$下的坐标，并将$\boldsymbol{\beta}$用此基线性表出.

2．求向量$\boldsymbol{\beta}=(5,9,-2)$在基$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,0)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(0,0,2)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(0,3,2)$下的坐标，并将$\boldsymbol{\beta}$用此基线性表出.

参考答案

一、单项选择题

1．C　　2．B　　3．B

二、填空题

1．n　　2．2　　3．2　　4．2　　5.2

三、计算题

1．$\boldsymbol{\beta}=(3,2,1)$　　2．$\left(5,-\dfrac{7}{3},\dfrac{4}{3}\right)$

第 4 章　线性方程组

【考核要求】

学习本章, 要求熟练掌握齐次线性方程组的解空间、基础解系及通解的含义和求法, 熟练掌握非齐次线性方程组的有解判别法和通解的求法.

本章重点：齐次线性方程组有非零解的充要条件；非齐次线性方程组有解的充要条件；会用矩阵的初等行变换求解线性方程组.

难点：齐次线性方程组的基础解系的求法.

考点 1　线性方程组解的条件

【考点内容】

1．齐次线性方程组

（1）设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m \times n$ 矩阵，则

① $\boldsymbol{Ax}=0$ 只有零解 $\Leftrightarrow \mathrm{r}(\boldsymbol{A})=n$；此时，$\boldsymbol{Ax}=0$ 没有基础解系；

② $\boldsymbol{Ax}=0$ 有非零解 $\Leftrightarrow \mathrm{r}(\boldsymbol{A})<n$；此时，$\boldsymbol{Ax}=0$ 有无穷多个基础解系.

当 $m<n$ 时，$\boldsymbol{Ax}=0$ 必有非零解，因此必有无穷多个基础解系.

（2）当 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵时，$\boldsymbol{Ax}=0$ 只有零解 $\Leftrightarrow |\boldsymbol{A}|\neq 0$；

$\boldsymbol{Ax}=0$ 有非零解 $\Leftrightarrow |\boldsymbol{A}|=0$.

2．非齐次线性方程组

定理 4.2.1　$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有解 $\Leftrightarrow \mathrm{r}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})$.

注意：当 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})$时，$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 必有解；当 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})+1$ 时，$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 必无解.

定理 4.2.3　设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m \times n$ 矩阵，且 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=r$. 则有以下结论：

当 $r=n$ 时，$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解；

当 $r<n$ 时，$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解；

因此，当 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})$时，$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解是唯一的 $\Leftrightarrow \mathrm{r}(\boldsymbol{A})=n$.

注意：当 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=n$ 时，$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 或者无解，或者有唯一解. 当 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})<n$ 时，$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 或者无解，或者有无穷多解.

定理 4.2.4　设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵，则有以下结论：

当 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$时，$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 必有唯一解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}$.

当 $|\boldsymbol{A}|=0$时，如果 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})$，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解；如果 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})+1$，则 $\boldsymbol{Ax}$

$=\boldsymbol{b}$ 无解.

因此，当 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵时，$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解 $\Leftrightarrow |\boldsymbol{A}|\neq 0$.

【典型例题】

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ \lambda & 1 & 1 \end{vmatrix}=0(x_2, x_3+k_2+k_3)\alpha_1+(k_1+-3k_3)\alpha_2+k_3\alpha_3=\boldsymbol{\xi}=k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2$$

【例 4-1】设齐次线性方程组 $\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3=0 \\ x_1-x_2-x_3=0 \\ \lambda x_1+x_2+x_3=0 \end{cases}$ 有非零解，则 λ 为（　　）.

A. -1　　B. 0　　C. 1　　D. 2

解：选 A. 由题意可知，其系数行列式 $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ \lambda & 1 & 1 \end{vmatrix}=0$. 采取代入法，若选 A，则第 2、3 行成比例，满足条件.

【例 4-2】对非齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$，设秩$(\boldsymbol{A})=r$，则（　　）.

A. $r=m$ 时，方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有解

B. $r=n$ 时，方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解

C. $m=n$ 时，方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解

D. $r<n$ 时，方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解

解：选 A. 由题意. 验证排除法：A，当 $r=m$ 时，只有 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=m$，方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有解；B，当 $r=n$ 时，有可能 $m=n+1$，致使 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})+1$，方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 无解；C，当 $m=n$ 时，无法确定 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})$；D，当 $r<n$ 时，可能 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})+1$.

【例 4-3】若 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 为 5 阶方阵，且 $\boldsymbol{Ax}=0$ 只有零解，且 $\mathrm{r}(\boldsymbol{B})=3$，则 $\mathrm{r}(\boldsymbol{AB})=$_______.

解：答案为 3. 由题意可知，$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=5$，为可逆矩阵，所以 $\mathrm{r}(\boldsymbol{AB})=\mathrm{r}(\boldsymbol{B})=3$.

【例 4-4】已知 3 元非齐次线性方程组的增广矩阵为 $\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & a+1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a+1 & 0 \end{array}\right)$，若该方程组无解，则 a 的取值为____________.

解：答案为 -1. 由题意可知，当 $a+1=0$，即 $a=-1$ 时，$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=1$，$\mathrm{r}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})=2$，方程组无解.

【同步练习及参考答案】

一、单项选择题

1．线性方程组$\begin{cases}x+y+z=0\\2x-5y-3z=10\\4x+8y+2z=4\end{cases}$的解为（　　）.

A．$x=2, y=0, z=-2$　　B．$x=-2, y=2, z=0$

C．$x=0, y=2, z=-2$　　D．$x=1, y=0, z=-1$

2．已知$(1,\ 2,\ -1)^{\mathrm{T}}, (2,\ 3,\ 1)^{\mathrm{T}}$是齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=0$ 的两个解，则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可为（　　）.

A．$(5,-3,-1)$　　B．$\begin{pmatrix}5 & -3 & 1\\2 & 1 & 1\end{pmatrix}$

C．$\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\2 & -1 & 7\end{pmatrix}$　　D．$\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\-1 & 2 & -2\\-5 & 3 & 1\end{pmatrix}$

3．若方程组$\begin{cases}kx+\quad\ z=0\\2x+ky+z=0\\kx-2y+z=0\end{cases}$仅有零解，则 $k\neq$（　　）.

A．-2　　B．-1　　C．0　　D．2

4．若方程组$\begin{cases}x_1+2x_2-x_3=\lambda-1\\3x_2-x_3=\lambda-2\\\lambda x_2-x_3=(\lambda-3)(\lambda-4)+(\lambda-2)\end{cases}$有无穷多解，则 $\lambda=$（　　）.

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

5．已知线性方程组$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=4\\x_1+ax_2+x_3=3\\2x_1+2ax_2=4\end{cases}$无解，则数 $a=$（　　）.

A．$-\dfrac{1}{2}$　　B．0　　C．$\dfrac{1}{2}$　　D．1

6．设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵，齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=0$ 有非零解的充分必要条件是（　　）.

A．$\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性相关　　B．$\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性无关

C．$\boldsymbol{A}$ 的行向量组线性相关　　D．$\boldsymbol{A}$ 的行向量组线性无关

7. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵, 则齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=0$ 仅有零解的充分必要条件是（　　）.

A．$\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性无关　　B．$\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性相关

C．$\boldsymbol{A}$ 的行向量组线性无关　　D．$\boldsymbol{A}$ 的行向量组线性相关

8．若四阶方阵的秩为 3，则（　　）.

A．$\boldsymbol{A}$ 为可逆阵　　B．齐次方程组 $\boldsymbol{Ax}=0$ 有非零解

C．齐次方程组 $\boldsymbol{Ax}=0$ 只有零解　　D．非齐次方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 必有解

9．设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，已知 $\boldsymbol{Ax}=0$ 只有零解，则以下结论正确的是（　　）．

A．$m\geq n$

B．$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$（其中 $\boldsymbol{b}$ 是 m 维实向量）必有唯一解

C．$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=m$

D．$\boldsymbol{Ax}=0$ 存在基础解系

10．设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵，$m\neq n$，则齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=0$ 只有零解的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 的秩（　　）．

A．小于 m　　B．等于 m　　C．小于 n　　D．等于 n

11．设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵，若对任意的 n 维向量 x 均满足 $Ax=0$，则（　　）．

A．$\boldsymbol{A}=0$　　B．$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$　　C．$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=n$　　D．$0<\mathrm{r}(\boldsymbol{A})<n$

12．设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵，且 $m<n$，则齐次方程 $\boldsymbol{AX}=0$ 必（　　）．

A．无解　　B．只有唯一解　　C．有无穷解　　D．不能确定

13．设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{A}$ 的秩为 r，则（　　）．

A．$r=m$ 时，$\boldsymbol{Ax}=0$ 必有非零解　　B．$r=n$ 时，$\boldsymbol{Ax}=0$ 必有非零解

C．$r<m$ 时，$\boldsymbol{Ax}=0$ 必有非零解　　D．$r<n$ 时，$\boldsymbol{Ax}=0$ 必有非零解

二、填空题

1．已知方程组 $\begin{cases} x_1-x_2=0 \\ -2x_1+tx_2=0 \end{cases}$ 存在非零解，则常数 $t=$____________．

2．若齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1+2x_2+ax_3=0 \\ 2x_1-x_2+x_3=0 \\ 3x_1+x_2-x_3=0 \end{cases}$ 有非零解，则数 $a=$__________．

3．若线性方程组 $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=1 \\ -2x_2+x_3=-2 \\ (\lambda+1)x_3=-\lambda \end{cases}$ 无解，则数 $\lambda=$__________．

4．设线性方程组 $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ 有无穷多个解，则 $a=$____________．

5．设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & t & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$，若齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=0$ 有非零解，则数 $t=$_________．

6．已知某个 3 元非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的增广矩阵 $\overline{A}$ 经初等行变换化为：

$\overline{A} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & a(a-1) & a-1 \end{pmatrix}$，若方程组无解，则 a 的取值为__________.

7．非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有解的充分必要条件是__________.

8．设 $\boldsymbol{A}$ 是 4×3 矩阵，若齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}$=0 只有零解，则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩 r ($\boldsymbol{A}$)=__________.

9．若 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，且齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}$=0 只有零解，则 $\boldsymbol{A}$ 的秩 r($\boldsymbol{A}$)=__________.

10．设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$，若非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有解，则增广矩阵 $\overline{\boldsymbol{A}}$ 的行列式 $|\overline{\boldsymbol{A}}|$=__________.

11．设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，若 $\boldsymbol{Ax}$=0 只有零解，则 r($\boldsymbol{A}$)= __________.

12．设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵，$\boldsymbol{B}$ 为 n 阶非零矩阵，若 $\boldsymbol{B}$ 的每一个列向量都是齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}$=0 的解，则|$\boldsymbol{A}$|=__________.

13．若非齐次线性方程组$\begin{cases} ax_1+ax_2+\cdots+ax_n=k \\ bx_1+bx_2+\cdots+bx_n=l \end{cases}$（$a,b,k,l$ 均不为 0）无解，则__________.

参考答案

一、单项选择题

1．A　2．A　3．D　4．C　5．D　6．A　7．A　8．B　9．B
10．D　11．D　12．C　13．D

二、填空题

1．2　2．-2　3．-1　4．-2　5．2　6．0　7．r($\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{b}$)= r($\boldsymbol{A}$)　8．3
9．n　10．0　11．n　12．0　13．$al\neq bk$

考点 2　齐次线性方程的基础解系

【考点内容】

定义 4.1.1　设$\{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_s\}$为齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=0$ 的一个解向量集．如果它满足

以下两个条件：

（1）$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_s$ 是线性无关的向量组；

（2）$\boldsymbol{Ax}=0$ 的任意一个解 $\boldsymbol{\xi}$ 都可表示为 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_s$ 的线性组合，即

$\boldsymbol{\xi}=k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_s\xi_s$，$k_1,k_2,\cdots,k_s$ 是常数，则称 $\{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_s\}$ 是 $\boldsymbol{Ax}$=0 的一个基础解系.

由定义可知，$\boldsymbol{Ax}$=0 的基础解系，实际上，就是 $\boldsymbol{Ax}$=0 的解空间 V 中的一个基．反之，$\boldsymbol{Ax}$=0 的解空间 V 中的任意一个基，一定是 $\boldsymbol{Ax}$=0 的一个基础解系.

当 $\boldsymbol{Ax}$=0 只有零解时，它没有线性相关的解，因而它没有基础解系．当 $\boldsymbol{Ax}$=0 有非零解时，它的解空间 V 不是零空间{0}，也就是说，V 一定是有无穷多个向量的向量组，因而 V 中一定有无穷多个基（也就是向量集合 V 的极大无关组）．因此只要 $\boldsymbol{Ax}$=0 有非零解，那么，它一定有无穷多个基础解系.

因为 $\boldsymbol{Ax}$=0 的基础解系都是 $\boldsymbol{Ax}$=0 的解空间 V 的基，所以它们是等价的线性无关组，因而必有相同个数的向量，这个个数就是向量空间 V 的维数.

定理 4.1.1　设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，r($\boldsymbol{A}$)= r，则

（1）$\boldsymbol{Ax}$=0 的基础解系中的解向量个数为 n-r；

（2）$\boldsymbol{Ax}$=0 的任意 n-r 个线性无关的解向量都是它的基础解系.

注意　（1）设 V 是 $\boldsymbol{Ax}$=0 的解空间．因为 $\boldsymbol{Ax}$=0 的任意 n-r 个线性无关的解向量都是它的基础解系，也就是它的解空间 V 的基，所以 $\Leftrightarrow$ dim$V$=n-r．它就是 $\boldsymbol{Ax}$=0 的（可以任意取值的）自由未知量的个数.

（2）基础解系有三个“必须”：向量个数必须是 n-r，它们必须都是 $\boldsymbol{Ax}$=0 的解，而且它们必须是线性无关的向量组，这三个条件缺一不可!

【典型例题】

【例 4-5】设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}$=0 的一个基础解系，则下列解向量组中，可以作为该方程组基础解系的是（　　）.

A. $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$　　B. $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$

C. $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2$　　D. $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1$

解：选 B. 排除法：因为基础解系线性无关的向量组，又 A、C、D 都是线性相关组，所以选项 B 正确.

【例 4-6】若 $\boldsymbol{A}$ 为 6 阶方阵，齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}$=0 的基础解系中解向量的个数为 2，则 r($\boldsymbol{A}$)=（　　）.

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5

解：选 C. 因为基础解系中解向量的个数为 2，所以 r($\boldsymbol{A}$)=6（总未知量个数）$-2=4$.

【例 4-7】齐次线性方程组$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0\\2x_1-x_2+3x_3=0\end{cases}$的基础解系所含解向量的个数为____________.

解：答案为 1．因为该齐次线性方程组的 r($\boldsymbol{A}$)=2，所以基础解系所含解向量的个数 = 3−2 =1.

例 4．设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$是齐次方程组$\boldsymbol{Ax}=0$的基础解系，证明$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$也是$\boldsymbol{Ax}=0$的基础解系.

证明 因为$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$是$\boldsymbol{Ax}=0$的基础解系，所以$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$也是方程组$\boldsymbol{Ax}=0$的 3 个解．下面证明$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$线性无关．设有$k_1,k_2,k_3$，使得

$$k_1(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)+k_2(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)+k_3(\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1)=0,$$

即$(k_1+k_3)\boldsymbol{\alpha}_1+(k_1+k_2)\boldsymbol{\alpha}_2+(k_2+k_3)\boldsymbol{\alpha}_3=0$．又因为$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关，所以必有

$$k_1+k_3=0,\quad k_1+k_2=0,\quad k_2+k_3=0.$$

可解得$k_1=k_2=k_3=0$，故$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$线性无关，为方程组$\boldsymbol{Ax}=0$的 3 个线性无关的解．所以$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$也是$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的基础解系.

【例 4-8】设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$是齐次方程组$\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x}$=0 的基础解系，证明$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$也是$\boldsymbol{Ax}$=0 的基础解系.

证明 因为$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$是$\boldsymbol{Ax}=0$的三个解，故由齐次线性方程组解的性质，易知$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$也是方程组$\boldsymbol{Ax}=0$的三个解.

令$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)+k_3(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)=0$，得 $(k_1+k_2+k_3)\boldsymbol{\alpha}_1+(k_2+k_3)\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3=0$，

由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$无关，可得$\begin{cases}k_1+k_2+k_3=0\\k_2+k_3=0\\k_3=0\end{cases}$，进一步解得$k_1=k_2=k_3=0$，

所以$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关，所以$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$是$\boldsymbol{Ax}=0$的一个基础解系.

【同步练习及参考答案】

一、单项选择题

1．设 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩 r($\boldsymbol{A}$)=n-3(n>3)，$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$是齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}$=0 的三个线性无关的解向量，则方程组$\boldsymbol{Ax}$=0 的基础解系为（　　）.

A．$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$　　B．$\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\gamma}-\boldsymbol{\beta}$

C．$\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\gamma}-\boldsymbol{\alpha}$　　D．$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma}$

2．设 $\boldsymbol{A}$ 为 5 阶方阵，若秩($\boldsymbol{A}$)=3，则齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}$=0 的基础解系中包含的解

向量的个数是（　　）.

A．2　　B．3　　C．4　　D．5

3．设 $\boldsymbol{A}$ 是 4×6 矩阵，$r(\boldsymbol{A})=2$，则齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=0$ 的基础解系中所含向量的个数是（　　）.

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

4. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，$r(\boldsymbol{A})<n$，下列关于齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=0$ 的叙述正确的是（　　）.

A．$\boldsymbol{Ax}=0$ 只有零解　　B．$\boldsymbol{Ax}=0$ 的基础解系含 $r(\boldsymbol{A})$个解向量

C．$\boldsymbol{Ax}=0$ 的基础解系含 $n-r(\boldsymbol{A})$个解向量　　D．$\boldsymbol{Ax}=0$ 没有解

5．齐次线性方程组$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3 & =0 \\ -x_2+x_3-x_4 & =0 \end{cases}$的基础解系所含解向量的个数为（　　）.

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

6．齐次线性方程组$\begin{cases} x_1+x_3+x_4=0 \\ x_2-x_3+2x_4=0 \end{cases}$的基础解系所含解向量的个数为（　　）.

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

7．齐次方程 $x_1+x_2-x_3=0$ 的基础解系所含向量个数是（　　）.

A．0　　B．1　　C．2　　D．3

8. 4 元齐次线性方程组$\begin{cases} 2x_2-x_3-x_4=0 \\ x_1+x_2+x_3=0 \\ x_1+3x_2-x_4=0 \end{cases}$的基础解系所含解向量的个数为（　　）.

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

9．齐次线性方程组$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ 2x_2-x_3-x_4=0 \end{cases}$的基础解系中所含解向量的个数为（　　）.

A.1　　B．2　　C．3　　D．4

10．设 $\boldsymbol{A}$ 为 3×4 矩阵，且 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $r(\boldsymbol{A})=1$，则齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=0$ 的基础解系所含解向量个数为（　　）.

A．4　　B．3　　C．2　　D．1

二、填空题

1．3 元齐次线性方程组$\begin{cases} x_1+x_2=0 \\ x_2-x_3=0 \end{cases}$的基础解系中所含解向量的个数为________.

2．齐次线性方程组$\begin{cases} 2x_1+x_2+3x_3=0 \\ 2x_1+x_2-3x_3=0 \end{cases}$的基础解系中所含解向量个数为________.

3．设 $\boldsymbol{A}$ 为 4×5 的矩阵，且秩$(\boldsymbol{A})=2$，则齐次方程组 $\boldsymbol{Ax}=0$ 的基础解系中所含向量的个数是_________.

4. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，$r(\boldsymbol{A})=r$，则 $\boldsymbol{Ax}=0$ 的基础解系中所含解向量的个数为________.

5．齐次线性方程组 $x_1+x_2+x_3=0$ 的基础解系中所含解向量的个数为__________.

6．设 $\boldsymbol{A}$ 为 3×3 矩阵，且方程组 $\boldsymbol{Ax}=0$ 的基础解系中含有两个解向量，则 $r(\boldsymbol{A})=$_____.

7．设 $\boldsymbol{\eta}_1$，$\boldsymbol{\eta}_2$ 是 5 元齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=0$ 的基础解系，则 $r(\boldsymbol{A})=$____________.

8．已知 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵，ξ_1,ξ_2 为齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=0$ 的基础解系，则 $|\boldsymbol{A}|=$_____.

三、证明题

1．设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是齐次方程组 $\boldsymbol{Ax}=0$ 的基础解系，证明 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$ 也是 $\boldsymbol{Ax}=0$ 的基础解系.

2．设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 为齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=0$ 的一个基础解系，证明 $2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3$ 也是该方程组的基础解系.

参考答案

一、单项选择题

1. C　2. A　3. D　4. C　5. B　6. B　7. C　8. B　9. B　10. B

二、填空题

1．1　2．1　3．3　4．$n-r$　5．2　6．1　7．3　8．0

三、证明题

1．证明：由已知条件知，$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$ 是齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=0$ 的三个解，并可写出矩阵等式，$(\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_3)\begin{vmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{vmatrix}$

因为表出矩阵的行列式 $\begin{vmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{vmatrix}=1\neq0$ 所以两向量组等价．又由 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 为齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=0$ 的一个基础解系，线性无关，所以 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$ 也线性无关，故 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$ 也是 $\boldsymbol{Ax}=0$ 的基础解系.

2．证明：由已知条件知，$2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3$ 是齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=0$ 的三个解，并可写出矩阵等式，

$$(2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix},$$

因为表出矩阵的行列式$\begin{vmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{vmatrix}=4\neq 0$，所以两向量组等价．又由$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$为齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}$=0 的一个基础解系，线性无关，则 $2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3$也线性无关，故 $2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3$也是该方程组的基础解系.

考点 3　线性方程组解的性质及其通解

【考点内容】

1．线性方程组解的性质

（1）齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=0$ 解的性质

性质 1 若ξ_1,ξ_2是齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=0$ 的两个解，则$\xi_1+\xi_2$也是 $\boldsymbol{Ax}=0$ 的解.

性质 2 若ξ是齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=0$ 的解，k 是任意常数，则$k\boldsymbol{\xi}$也是 $\boldsymbol{Ax}=0$ 的解.

（2）非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 解的性质

性质 1　如果$\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2$是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解，则$\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2$是 $\boldsymbol{Ax}=0$ 的解.

性质 2　如果$\boldsymbol{\eta}$是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解，ξ是 $\boldsymbol{Ax}=0$ 的解，则$\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\eta}$是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解.

2．线性方程组的通解

（1）齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=0$ 的通解

设$\{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}\}$是 $\boldsymbol{Ax}=0$ 的一个基础解系，则称$\boldsymbol{\xi}=k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}$为齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=0$ 的通解，其中$k_1,k_2,\cdots,k_{n-r}$为任意常数.

注意 要知道基础解系中解向量是不能为零向量的.

齐次线性方程组求通解的思路：

① 先写出齐次线性方程组所对应的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$，对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 进行初等行变换，化到行最简形矩阵 $\boldsymbol{B}$ 为止；

② 根据行最简形矩阵 $\boldsymbol{B}$ 写出对应的同解方程组，同时指出自由未知量，如x_1,x_2；

③ 对自由未知量x_1,x_2进行赋值，通常为 x_1=1, x_2=0 与 x_1=0, x_2=1，就能得到其他未知量的值，从而可得到基础解系ξ_1,ξ_2（取值方式可任意选取，只要得到的解向量线性无关即可，所以最后的通解结果不唯一）；

④ 写出答案：于是，线性方程组的通解为 $\boldsymbol{\xi}=k_1\xi_1+k_2\xi_2$，$k_1$ 和 k_2 为任意实数.

（2）非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解

定理 4.2.2　设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，且 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=r$，则非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的一般解（也称为通解）为

$$\boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{\eta}^*+k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+k_{n-r}\boldsymbol{\xi}_{n-r},$$

其中，$\boldsymbol{\eta}^*$为$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的任意一个解（称其为特解），$\{\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-r}\}$为$\boldsymbol{Ax}=0$的任意一个基础解系.

注意：非齐次线性方程组的通解=自身的特解+对应导出组（即对应的齐次线性方程组）的通解.

非齐次线性方程组求通解的思路：

① 先写出非齐次线性方程组所对应的增广矩阵$(\boldsymbol{A},b)$，然后对增广矩阵$(\boldsymbol{A},b)$进行初等行变换，化到行最简形矩阵$\boldsymbol{T}$为止；

② 根据行最简形矩阵$\boldsymbol{T}$写出对应的同解非齐次线性方程组，同时指出自由未知量，如x_1,x_2；

③ 令$x_1=x_2=0$，就可得到最简单的一个特解$\boldsymbol{\eta}^*$；

④ 再写出对应的同解齐次线性方程组，对自由未知量x_1,x_2进行赋值，通常为$x_1=1$，$x_2=0$与$x_1=0,x_2=1$，就能得到其他未知量的值，从而可得到基础解系$\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2$（取值方式可任意选取，只要得到的解向量线性无关即可，所以最后的通解结果不唯一）；

⑤ 写出答案：于是，原非齐次线性方程组的通解为$\boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{\eta}^*+k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2$，$k_1$和$k_2$为任意实数.

【典型例题】

【例 4-9】设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$是$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的解，$\boldsymbol{\eta}$是对应齐次方程组$\boldsymbol{Ax}=0$的解，则（　　）.

A. $\boldsymbol{\eta}+\boldsymbol{\alpha}_1$是$\boldsymbol{Ax}=0$的解　　B. $\boldsymbol{\eta}+(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2)$是$\boldsymbol{Ax}=0$的解

C. $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$是$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的解　　D. $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2$是$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的解

解：选 B. 根据线性方程组解的性质可知：A，$\boldsymbol{\eta}+\boldsymbol{\alpha}_1$是$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的解；C，$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$是$\boldsymbol{Ax}=2\boldsymbol{b}$的解；D，$\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2$是$\boldsymbol{Ax}=0$的解.

【例 4-10】设 3 元线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{A}$的秩为 2，$\boldsymbol{\eta}_1$，$\boldsymbol{\eta}_2$，$\boldsymbol{\eta}_3$为方程组的解，$\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\eta}_2=(2,0,4)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\eta}_3=(1,-2,1)^{\mathrm{T}}$，则对任意常数$k$，方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的通解为（　　）.

A. $(1,0,2)^{\mathrm{T}}+k(1,-2,1)^{\mathrm{T}}$　　B. $(1,-2,1)^{\mathrm{T}}+k(2,0,4)^{\mathrm{T}}$

C. $(2,0,4)^{\mathrm{T}}+k(1,-2,1)^{\mathrm{T}}$　　D. $(1,0,2)^{\mathrm{T}}+k(1,2,3)^{\mathrm{T}}$

解：选 D. 由题意可知，导出组基础解系中的解向量个数只有一个，$\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\eta}_2-(\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\eta}_3)=(1,2,3)^{\mathrm{T}}$为其导出组的解，故可作基础解系，只有 D 正确. 同时，因为$\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\eta}_2$是$\boldsymbol{Ax}=2\boldsymbol{b}$的解，所以可得一特解为$(1,0,2)^{\mathrm{T}}$. 或者，根据解的性质也可知，$\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\eta}_2$与$\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\eta}_3$都不是对应导出组的解，故可排除 A、B、C.

【例 4-11】设 4 阶矩阵$\boldsymbol{A}$的秩为 3，$\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2$为非齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的两个不同的解，$c$为任意常数，则该方程组的通解为（　　）.

A. $\eta_1+c\dfrac{\eta_1-\eta_2}{2}$　　B. $\dfrac{\eta_1-\eta_2}{2}+c\eta_1$　　C. $\eta_1+c\dfrac{\eta_1+\eta_2}{2}$　　D. $\dfrac{\eta_1+\eta_2}{2}+c\eta_1$

解：选 C. 由题意可知，导出组基础解系中的解向量个数只有一个，选项中只有 $\dfrac{\eta_1+\eta_2}{2}$ 可作为基础解系，所以 C 正确.

【例 4-12】设 A 为 3 阶矩阵，且 r(A)=2，若 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$ 为齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=0$ 的两个不同的解. k 为任意常数，则方程组 $\boldsymbol{Ax}=0$ 的通解为（　　）.

A. $k\boldsymbol{\alpha}_1$　　B. $k\boldsymbol{\alpha}_2$　　C. $k\dfrac{\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2}{2}$　　D. $k\dfrac{\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2}{2}$

解：选 D. 因为基础解系中的解向量不能为零向量，又只有选项 D 的 $\dfrac{\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2}{2}$ 一定不是零向量，而选项 A、B、C 中的向量都可能为零向量，所以选 D.

【例 4-13】三元方程组 $\begin{cases}x_1+x_3=0\\x_1-x_2=0\end{cases}$ 的通解是____________.

解：答案为 $k(1,1,-1)^{\mathrm T}$，$k\in\mathrm R$. 选 x_1 作为自由未知量，可得基础解系 $(1,1,-1)^{\mathrm T}$，所以通解可表示为 $k(1,1,-1)^{\mathrm T}$，$k\in\mathrm R$.

【例 4-14】方程 $x_1+x_2-x_3=1$ 的通解是____________.

解：答案为 $(1,0,0)^{\mathrm T}+k_1(-1,1,0)^{\mathrm T}+k_2(1,0,1)^{\mathrm T}$，$k_1,k_2\in\mathrm R$. 选 x_2,x_3 为自由未知量，可得特解 $(1,0,0)^{\mathrm T}$，其基础解系为 $(-1,1,0)^{\mathrm T}$，$(1,0,1)^{\mathrm T}$，所以通解可表示为 $(1,0,0)^{\mathrm T}+k_1(-1,1,0)^{\mathrm T}+k_2(1,0,1)^{\mathrm T}$，$k_1,k_2\in\mathrm R$.

【例 4-15】设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&-2\\4&t&3\\3&-1&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}$ 为 3 阶非零矩阵，且 $\boldsymbol{AB}$=0，则 t =____________.

解：答案 -3. 由题意可知，$\boldsymbol{B}$ 的列向量是齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=0$ 的非零解，故可得 $|\boldsymbol{A}|=0$，进而可得 $t=-3$.

例 8. 求齐次线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=0\\x_1+2x_2+4x_3+4x_4=0\\2x_1+3x_2+5x_3+5x_4=0\end{cases}$ 的一个基础解系，并表示出通解.

解：对该方程组的系数矩阵施行初等行变换

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&2&4&4\\2&3&5&5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&3&3\\0&1&3&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-2&-2\\0&1&3&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

对应的同解方程组为

$$\begin{cases} x_1 - 2x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}，\ 即 \begin{cases} x_1 = 2x_3 + 2x_4 \\ x_2 = -3x_3 - 3x_4 \end{cases}$$

x_3, x_4 为自由未知量，分别取 $x_3 = 1,\ x_4 = 0$ 和 $x_3 = 0,\ x_4 = 1$ 可得基础解系

$$\boldsymbol{\xi}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\xi}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

于是，原方程组的通解可表示为 $\boldsymbol{\xi} = k_1\boldsymbol{\xi}_1 + k_2\boldsymbol{\xi}_2$， k_1 和 k_2 为任意实数.

【例 4-16】求非齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 3 \end{cases}$ 的通解（要求用它的一个特解和导出组的基础解系表示）.

解：对该方程组的增广矩阵施行初等行变换

$$(\boldsymbol{A}, b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

对应的同解方程组为

$$\begin{cases} x_1 - x_3 - x_4 = -2 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 3 \end{cases}，\ 即 \begin{cases} x_1 = -2 + x_3 + x_4 \\ x_2 = 3 - 2x_3 - 2x_4 \end{cases}$$

取 $x_3 = x_4 = 0$，得原方程组的一个特解为 $\boldsymbol{\eta}^* = (-2, 3, 0, 0)^{\mathrm{T}}$.

原方程组的导出组的同解方程组为 $\begin{cases} x_1 = x_3 + x_4 \\ x_2 = -2x_3 - 2x_4 \end{cases}$， x_3, x_4 为自由未知量. 分别取 $x_3 = 1$， $x_4 = 0$ 和 $x_3 = 0,\ x_4 = 1$，可求得基础解系

$$\boldsymbol{\xi}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\xi}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

于是，原方程组的通解为 $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}^* + k_1\boldsymbol{\xi}_1 + k_2\boldsymbol{\xi}_2$， k_1 和 k_2 为任意实数.

【例 4-17】求 λ 取何值时，齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 0 \\ 4x_1 + x_3 = 0 \\ -5x_1 + \lambda x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$ 有非零解？并在有非零解时求出方程组的通解.

解：该方程组的系数行列式 $\boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \\ -5 & \lambda & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \\ -1 & \lambda & 0 \end{vmatrix} = -(\lambda + 3)$.

（1）当 $\lambda=-3$ 时，系数行列式 $|\boldsymbol{A}|=0$，方程组有非零解.

（2）当 $\lambda=-3$ 时，对系数矩阵进行初等行变换

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&3&0\\4&0&1\\-5&-3&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&3&0\\0&-12&1\\0&12&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&3&0\\0&12&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

对应的同解方程组为

$$\begin{cases}x_1+3x_2=0\\12x_2-x_3=0\end{cases}，\ 即\begin{cases}x_1=-3x_2\\x_3=12x_2\end{cases}$$

x_2 为自由未知量，取 $x_2=1$，可得基础解系 $\boldsymbol{\eta}=(-3,1,12)^{\mathrm{T}}$.

于是，原方程组的通解为 $k\boldsymbol{\eta}$，k 为任意常数.

例 11．给定线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_2+x_3=a-3\\x_1+ax_2+x_3=-2\\x_1+x_2+ax_3=-2\end{cases}$

（1）问 a 为何值时，方程组有无穷多个解；

（2）当方程组有无穷多个解时，求出其通解（要求用它的一个特解和导出组的基础解系表示）.

解：对方程组的增广矩阵施行初等行变换

$$(\boldsymbol{A},b)=\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&1&a-3\\1&a&1&-2\\1&1&a&-2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&1&a-3\\0&a-1&0&1-a\\0&0&a-1&1-a\end{array}\right).$$

（1）当 $a=1$ 时，$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A},b)=1<3$，方程组有无穷多个解；

（2）当 $a=1$ 时，对应的同解方程组为

$$x_1+x_2+x_3=-2，即\ x_1=-2-x_2-x_3，$$

取 $x_2=x_3=0$，得原方程组的一个特解为 $\boldsymbol{\eta}^*=(-2,0,0)^{\mathrm{T}}$.

原方程组的导出组的同解方程组为 $x_1=-x_2-x_3$，x_2,x_3 为自由未知量. 分别取 $x_2=1$，$x_3=0$ 和 $x_2=0,\ x_3=1$，可求得基础解系

$$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}，\ \boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

于是，原方程组的通解为 $\boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{\eta}^*+k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2$，$k_1$ 和 k_2 为任意实数.

【同步练习及参考答案】

一、单项选择题

1．设 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解，则（　　）.

A. $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$ 也是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解　　B. $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2$ 也是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解

C. $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2$ 是对应的齐次线性方程组的解　　D. $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$ 也是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解

2．设 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 n-1，且 ξ_1，ξ_2 是齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=0$ 的两个不同的解，则 $\boldsymbol{Ax}=0$ 的通解为（　　）.

A. $k\xi_1$，$k\in\mathbf{R}$　　B. $k\xi_2$，$k\in\mathbf{R}$

C. $k\xi_1+\xi_2$，$k\in\mathbf{R}$　　D. $k(\xi_1-\xi_2),k\in\mathbf{R}$

3．设 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2$ 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的两个不同的解，则（　　）.

A. $\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\eta}_2$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解　　B. $\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解

C. $3\boldsymbol{\eta}_1-2\boldsymbol{\eta}_2$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解　　D. $2\boldsymbol{\eta}_1-3\boldsymbol{\eta}_2$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解

4．设 $\boldsymbol{\alpha}$ 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解，$\boldsymbol{\beta}$ 是其导出组 $\boldsymbol{Ax}=0$ 的解，则以下结论正确的是（　　）.

A. $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$ 是 $\boldsymbol{Ax}=0$ 的解　　B. $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解

C. $\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha}$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解　　D. $\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}$ 是 $\boldsymbol{Ax}=0$ 的解

5．设 3 元非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的两个解为 $\boldsymbol{\alpha}=(1,0,2)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}=(1,-1,3)^{\mathrm{T}}$，且系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=2$，则对于任意常数 k,k_1,k_2，方程组的通解可表示为（　　）.

A. $k_1(1,0,2)^{\mathrm{T}}+k_2(1,-1,3)^{\mathrm{T}}$　　B. $(1,0,2)^{\mathrm{T}}+k(1,-1,3)^{\mathrm{T}}$

C. $(1,0,2)^{\mathrm{T}}+k(0,1,-1)^{\mathrm{T}}$　　D. $(1,0,2)^{\mathrm{T}}+k(2,-1,5)^{\mathrm{T}}$

6．已知 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的两个不同的解，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是其导出组 $\boldsymbol{Ax}=0$ 的一个基础解系，C_1，C_2 为任意常数，则方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解可以表示为（　　）.

A. $\frac{1}{2}(\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2)+C_1\boldsymbol{\alpha}_1+C_2(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)$　　B. $\frac{1}{2}(\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2)+C_1\boldsymbol{\alpha}_1+C_2(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)$

C. $\frac{1}{2}(\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2)+C_1\boldsymbol{\alpha}_1+C_2(\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2)$　　D. $\frac{1}{2}(\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2)+C_1\boldsymbol{\alpha}_1+C_2(\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2)$

7．设 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$ 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的两个解向量，则下列向量中为方程组解的是（　　）.

A. $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2$　　B. $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$　　C. $\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$　　D. $\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_1+\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_2$

8．设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是非齐次方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解，$\boldsymbol{\beta}$ 是对应齐次方程组的解，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 一定有一个解是（　　）.

A. $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$　　B. $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2$

C. $\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$　　D. $\frac{1}{3}\boldsymbol{\alpha}_1+\frac{2}{3}\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\beta}$

9.设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解，$\boldsymbol{\beta}$ 是对应的齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=0$ 的解，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有解（　　）.

A. $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$　　B. $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2$　　C. $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\beta}$　　D. $2\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\beta}$

10．设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 为 4 阶非零矩阵，且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，若 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=3$，则 $\mathrm{r}(\boldsymbol{B})=$（　　）.

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

二、填空题

1. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解. 则 $\boldsymbol{A}(5\boldsymbol{\alpha}_2 - 4\boldsymbol{\alpha}_1)$=____________.

2. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 是齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=0$ 的两个解, 则 $\boldsymbol{A}(3\boldsymbol{\alpha}_1 + 7\boldsymbol{\alpha}_2) =$______________.

3. 设 $\boldsymbol{\alpha}$ 是齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=0$ 的解，而 $\boldsymbol{\beta}$ 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解，则 $\boldsymbol{A}(3\boldsymbol{\alpha}+2\boldsymbol{\beta}) =$______________.

4. 3 元齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$ 的一个基础解系为_________________.

5. 方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$ 的基础解系为____________.

6. 方程组 $x_1 + x_2 - x_3 = 0$ 的通解是__________.

7. 三元齐次线性方程组 $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ 的通解是_____________________.

8. 三元方程 $x_1+x_2+x_3=1$ 的通解是______________.

9. 三元方程 $x_1 + x_3 = 1$ 的通解是_____________.

10. 非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的增广矩阵经初等行变换化为 $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 \end{array}\right)$，则方程组的通解是_________________________.

11. 设非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的增广矩阵为 $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 6 \end{array}\right)$，则该方程组的通解为________.

12. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ 为 3 阶非奇异矩阵，则齐次线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = 0 \end{cases}$ 的解为______________.

13. 设齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=0$ 有解 $\boldsymbol{\xi}$，而非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有解 $\boldsymbol{\eta}$，则 $\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\eta}$ 是方程组______的解.

14. 已知 $x_1=(1, 0, -1)^{\mathrm{T}}$, $x_2=(3, 4, 5)^{\mathrm{T}}$ 是 3 元非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的两个解向量，则对应齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=0$ 有一个非零解向量 $\boldsymbol{\xi}=$_________________.

15. 设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 2，$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$ 为非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的两个不同解，则方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解为________.

16．设 3 元非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有解 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix}$，且 r($\boldsymbol{A}$)=2，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解是__________.

17．已知 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 为 4 元线性方程组，r($\boldsymbol{A}$)=3，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 为该方程组的 3 个解，且 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}3\\5\\7\\9\end{pmatrix}$，则该线性方程组的通解是______________.

18. 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的各行元素之和均为 0, 且 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 n-1, 则齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=0$ 的通解为_______.

19．设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 实矩阵，若 r($\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$) =5，则 r($\boldsymbol{A}$) =____________.

20．设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 实矩阵，则秩（$\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}}$）_______秩（$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$）.（填“$=$”或“$\neq$”）

三、计算题

1．求齐次线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_3-5x_4=0\\2x_1+x_2-3x_4=0\\x_1+x_2-x_3+2x_4=0\end{cases}$ 的通解.

2．求齐次线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_2+x_5=0\\x_1+x_2-x_3=0\\x_3+x_4+x_5=0\end{cases}$ 的基础解系及其通解.

3．求齐次线性方程组 $\begin{cases}2x_1-3x_2+x_3+5x_4=0\\-3x_1+x_2+2x_3-4x_4=0\\-x_1-2x_2+3x_3+x_4=0\end{cases}$ 的一个基础解系及其通解.

4．求非齐次线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_2-3x_3-x_4=1\\3x_1-x_2-3x_3+4x_4=4\\x_1+5x_2-9x_3-8x_4=0\end{cases}$ 的通解.

5．求齐次线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_2-2x_4=0\\4x_1-x_2-x_3-x_4=0\\3x_1-x_2-x_3=0\end{cases}$ 的基础解系及其通解.

6．当 λ 为何值时，齐次方程组 $\begin{cases}x_1+2x_2-2x_3=0\\2x_1-x_2+\lambda x_3=0\\3x_1+x_2-x_3=0\end{cases}$ 有非零解？并求其全部非零解.

7．求 λ 取何值时，齐次方程组 $\begin{cases}(\lambda+4)x_1+3x_2=0\\4x_1+x_3=0\\-5x_1+\lambda x_2-x_3=0\end{cases}$ 有非零解？并在有非零解时求出方程组的通解.

8．设 3 元齐次线性方程组 $\begin{cases}ax_1+x_2+x_3=0\\x_1+ax_2+x_3=0\\x_1+x_2+ax_3=0\end{cases}$，

（1）确定当 a 为何值时，方程组有非零解；

（2）当方程组有非零解时，求出它的基础解系和全部解.

9．求非齐次线性方程组 $\begin{cases}x_1-x_2=2\\3x_1+2x_2+3x_3=1\end{cases}$ 的通解.

10．求线性方程组 $\begin{cases}x_1+2x_2+4x_3=3\\2x_2+2x_3=3\\2x_1+2x_2+6x_3=3\end{cases}$ 的通解.

11．求非齐次方程组 $\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=7\\3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5=-2\\x_2+2x_3+2x_4+6x_5=23\\5x_1+4x_2-3x_3+3x_4-x_5=12\end{cases}$ 的通解.

12．判断线性方程组 $\begin{cases}x_1-x_2+3x_3-x_4=1\\2x_1-x_2-x_3+4x_4=2\\x_1-4x_3+5x_4=-1\end{cases}$ 是否有解，有解时求出它的解.

13．求线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_2+2x_3+x_4=3\\x_1+2x_2+x_3-x_4=2\\2x_1+x_2+5x_3+4x_4=7\end{cases}$ 的通解.（要求用它的一个特解和导出组的基础解系表示）

14．求线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_2=5\\2x_1+x_2+x_3+2x_4=1\\5x_1+3x_2+2x_3+2x_4=3\end{cases}$ 的通解.

15．求解非齐次线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_2-x_3-x_4=1\\2x_1+x_2+x_3+x_4=4\\4x_1+3x_2-x_3-x_4=6\end{cases}$．(要求用它的一个特解和导出组的基础解系表示)

16．求线性方程组$\begin{cases} x_1+x_3+2x_4=-1 \\ 2x_1+x_2+3x_3+x_4=-4 \\ x_1+2x_2+3x_3-4x_4=-5 \\ -x_1-x_2-2x_3+x_4=3 \end{cases}$的通解.

17．求线性方程组$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=0 \\ x_2+2x_3+2x_4=1 \\ x_1+2x_2+3x_3+3x_4=1 \end{cases}$的通解（要求用其一个特解和导出组的基础解系表示）.

18．设矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

（1）求$\boldsymbol{A}^{-1}$；

（2）求解线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$，并将$\boldsymbol{b}$用$\boldsymbol{A}$的列向量组线性表出.

19．已知线性方程组$\begin{cases} x_1+2x_3=-1 \\ -x_1+x_2-3x_3=2 \\ 2x_1-x_2+5x_3=a \end{cases}$

（1）求当a为何值时，方程组无解、有解；

（2）当方程组有解时，求出其全部解（要求用其一个特解和导出组的基础解系表示）.

20．当a,b为何值时，方程组$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=1 \\ x_2-x_3=1 \\ 2x_1+3x_2+(a+2)x_3=b+3 \end{cases}$有无穷多解？并求出其通解.

21．已知线性方程组$\begin{cases} x_1+x_2+\lambda x_3=-2 \\ x_1+\lambda x_2+x_3=-2 \\ \lambda x_1+x_2+x_3=\lambda-3 \end{cases}$，

（1）讨论λ为何值时，方程组无解、有唯一解、有无穷多个解.

（2）在方程组有无穷多个解时，求出方程组的通解（要求用其一个特解和导出组的基础解系表示）.

22．已知线性方程组$\begin{cases} x_1-x_2=a_1 \\ x_2-x_3=a_2 \\ x_3-x_1=a_3 \end{cases}$

（1）讨论常数a_1,a_2,a_3满足什么条件时，方程组有解.

（2）当方程组有无穷多解时，求出其通解(要求用它的一个特解和导出组的基础解系表示).

23．问 a 为何值时，线性方程组 $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=4 \\ \qquad 2x_2+ax_3=2 \\ 2x_1+2x_2+3x_3=6 \end{cases}$ 有唯一解？有无穷多解？并在有解时求出其解.

24．设 3 元线性方程组 $\begin{cases} 2x_1+\lambda x_2-x_3=1 \\ \lambda x_1-x_2+x_3=2 \\ 4x_1+5x_2-5x_3=-1 \end{cases}$，

（1）确定当 λ 取何值时，方程组有唯一解、无解、无穷多解？

（2）当方程组有无穷多解时，求出该方程组的通解（要求用其一个特解和导出组的基础解系表示）.

25．设四元方程组 $\begin{cases} x_1-x_2+3x_3+2x_4=3 \\ 2x_1-x_2+2x_3-x_4=2 \\ x_1-2x_2+7x_3+7x_4=t \end{cases}$，问 t 取何值时该方程组有解？并在有解时求其通解.

26．已知 4 元线性方程组 $\begin{cases} x_1-x_2=a \\ x_2-x_3=2a \\ x_3-x_4=3a \\ -x_1+x_4=1 \end{cases}$，

（1）确定 a 的值，使方程组有解；

（2）在有解时，求出其通解（要求用它的一个特解和导出组的基础解系表示）.

27．已知齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=0$ 的一个基础解系为 $\xi_1=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$，$\xi_2=\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}$，求 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})$ 及该齐次线性方程组.

四、证明题

1．设 $\boldsymbol{\alpha}$ 为 $\boldsymbol{Ax}=0$ 的非零解，$\boldsymbol{\beta}$ 为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ $(\boldsymbol{b}\neq 0)$ 的解，证明 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 线性无关.

2．设 $\boldsymbol{\eta}$ 为非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的一个解，$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_r$ 是其导出组 $\boldsymbol{Ax}=0$ 的一个基础解系.

证明 $\boldsymbol{\eta},\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_r$ 线性无关.

3．若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}(\boldsymbol{b}\neq 0)$ 的线性无关解，证明 $\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1$ 是对应齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=0$ 的线性无关解.

4．设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 实矩阵，$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵．证明：线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=0$ 只有零解.

5．设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，证明齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=0$ 与 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}=0$ 同解.

参考答案

一、单项选择题

1. C　2. D　3. C　4. B　5. C　6. A　7. D　8. D　9. D　10. A

二、填空题

1. $\boldsymbol{b}$　2. 0　3. $2\boldsymbol{b}$　4. $(-2,1,0)^{\mathrm{T}}$　5. $(1,-1,1)^{\mathrm{T}}$

6. $k_1(-1,1,0)^{\mathrm{T}}+k_2(1,0,1)^{\mathrm{T}}$，$k_1,k_2\in\mathrm{R}$　7. $k_1(-1,1,0)^{\mathrm{T}}+k_2(-1,0,1)^{\mathrm{T}}$，$k_1,k_2\in\mathrm{R}$

8. $(1,0,0)^{\mathrm{T}}+k_1(-1,1,0)^{\mathrm{T}}+k_2(-1,0,1)^{\mathrm{T}}$，$k_1,k_2\in\mathrm{R}$

9. $(1,0,0)^{\mathrm{T}}+k_1(0,1,0)^{\mathrm{T}}+k_2(-1,0,1)^{\mathrm{T}}$，$k_1,k_2\in\mathrm{R}$

10. $(2,2,-2,0)^{\mathrm{T}}+k(0,0,-2,1)^{\mathrm{T}}$，$k\in\mathrm{R}$　11. $(1,2,3,0)^{\mathrm{T}}+k(-2,1,-2,1)^{\mathrm{T}}$，$k\in\mathrm{R}$

12. $(0,0,0)^{\mathrm{T}}$　13. $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$　14. $(2,4,6)^{\mathrm{T}}$　15. $\boldsymbol{\alpha}_1+k(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2)$，$k\in\mathrm{R}$

16. $(1,2,3)^{\mathrm{T}}+k(2,0,0)^{\mathrm{T}}$，$k\in\mathrm{R}$　17. $(1,2,3,4)^{\mathrm{T}}+k(1,1,1,1)^{\mathrm{T}}$，$k\in\mathrm{R}$

18. $k(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$，$k\in\mathrm{R}$　19. 5　20. =

三、计算题

1. $k_1(-1,2,1,0)^{\mathrm{T}}+k_2(5,-7,0,1)^{\mathrm{T}}$，$k_1,k_2\in\mathrm{R}$.

2. 基础解系：$\boldsymbol{\xi}_1=(-1,1,0,0,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\xi}_2=(-1,0,-1,0,1)^{\mathrm{T}}$，通解：$k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2$，$k_1,k_2\in\mathrm{R}$.

3. 基础解系：$\boldsymbol{\xi}_1=(1,1,1,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\xi}_2=(-1,1,0,1)^{\mathrm{T}}$，通解：$k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2$，$k_1,k_2\in\mathrm{R}$.

4. $\left(\frac{5}{4},\frac{-1}{4},0,0\right)^{\mathrm{T}}+k_1(3,3,2,0)^{\mathrm{T}}+k_2(-3,7,0,4)^{\mathrm{T}}$，$k_1,k_2\in\mathrm{R}$.

5. 基础解系为：$\boldsymbol{\xi}=(1,1,2,1)^{\mathrm{T}}$，通解为：$\boldsymbol{x}=k\boldsymbol{\xi}=k(1,1,2,1)^{\mathrm{T}}$，其中$k$为任意实数.

6. $\lambda=1$．基础解系$\boldsymbol{\xi}=(0,\ 1,\ 1)^{\mathrm{T}}$．通解为：$\boldsymbol{x}=k\boldsymbol{\xi}$，$k$为任意实数.

7. 当$\lambda=-1$或$\lambda=-3$时，$D=0$，该线性方程组有非零解；
当$\lambda=-1$时，基础解系为：$\boldsymbol{\xi}=(1,-1,-4)^{\mathrm{T}}$，通解为$\boldsymbol{x}=k\boldsymbol{\xi}$（$k$为任意实数）；
当$\lambda=-3$时，基础解系为$\boldsymbol{\eta}=(-3,1,12)^{\mathrm{T}}$，故该方程组的通解为$\boldsymbol{x}=l\boldsymbol{\eta}$（$l$为任意实数）.

8.（1）当$a=-2$或$a=1$时，该方程组有非零解.

（2）当$a=-2$时，基础解系为：$\boldsymbol{\xi}=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$，故其全部解为：$\boldsymbol{x}=k\boldsymbol{\xi}$（$k$为任意实数且$k\neq0$）.

当$a=1$时，基础解系为：$\boldsymbol{\xi}_1=(-1,1,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\xi}_2=(-1,0,1)^{\mathrm{T}}$，故其全部解为$k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2$（$k_1,k_2$为任意实数，且$k_1,k_2$不同时为0）.

9. 通解为：$x=(1,-1,0)^{\mathrm{T}}+k(3,\ 3,\ -5)^{\mathrm{T}}$，（$k$为任意实数）.

10. 通解为：$x=(0,3/2,0)^{\mathrm{T}}+k(-2,-1,1)^{\mathrm{T}}$，（$k$为任意实数）.

11．通解为：$x=\begin{pmatrix}-16\\23\\0\\0\\0\end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix}-1\\-2\\0\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}5\\-6\\0\\0\\1\end{pmatrix}$，（$k_1$， k_2 为任意实数）.

12．线性方程组无解.

13．$x=\begin{pmatrix}4\\-1\\0\\0\end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix}-3\\1\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-3\\2\\0\\1\end{pmatrix}$，（$k_1$ 和 k_2 为任意实数）.

14．$x=\begin{pmatrix}-8\\13\\0\\2\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\0\end{pmatrix}$，（$k$ 为任意实数）.

15．$x=\begin{pmatrix}3\\-2\\0\\0\end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix}-2\\3\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}3\\-2\\0\\1\end{pmatrix}$，（$k_1$ 和 k_2 为任意实数）.

16．$x=\begin{pmatrix}-1\\-2\\0\\0\end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-2\\3\\0\\1\end{pmatrix}$，（$k_1$ 和 k_2 为任意实数）.

17．$x=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\1\end{pmatrix}$，（$k_1$ 和 k_2 为任意实数）.

18．（1）$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}1&-4&-3\\1&-5&-3\\-1&6&4\end{pmatrix}$.

（2）设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，则有 $\boldsymbol{b}=-2\boldsymbol{\alpha}_1-3\boldsymbol{\alpha}_2+4\boldsymbol{\alpha}_3$.

19．（1）当 $a=-3$ 时，方程组有解；当 $a\neq-3$ 时，方程组无解.

（2）当 $a=-3$ 时，通解为：$x=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}$，（$k$ 为任意实数）.

20．当 $a=-1,\ b=0$ 时，该方程组有无穷多解．通解为：$x=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}$，（$k$ 为任意实数）．

21．（1）当 $\lambda=-2$ 时，方程组无解；当 $\lambda\neq-2$ 且 $\lambda\neq1$ 时，方程组有唯一解；当 $\lambda=1$ 时，方程组有无穷多个解．

（2）当 $\lambda=1$ 时，通解为：$x=\begin{pmatrix}-2\\0\\0\end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$（$k_1,k_2$ 为任意实数）．

22．当 $a_1+a_2+a_3=0$ 时，方程组有解．

当 $a_1+a_2+a_3=0$ 时，该方程组有无穷多解．通解为：$x=\begin{pmatrix}a_1+a_2\\a_2\\0\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，（$k$ 为任意实数）．

23．当 $a\neq3$ 时，有唯一解 $\begin{cases}x_1=2\\x_2=1\\x_3=0\end{cases}$；

当 $a=3$ 时，有无穷多解．通解为：$x=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}0\\3\\-2\end{pmatrix}$，其中 k 为任意实数．

24．当 $\lambda\neq-\dfrac{4}{5}$ 且 $\lambda\neq1$ 时，方程组有唯一解；当 $\lambda=-\dfrac{4}{5}$ 时，方程组无解；

当 $\lambda=1$ 时，方程组有无穷多解．通解为：$x=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$，（$k$ 为任意常数）．

25．当 $t=7$ 时，方程组有解．通解为：$x=\begin{pmatrix}-1\\-4\\0\\0\end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix}1\\4\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}3\\5\\0\\1\end{pmatrix}$，（$k_1$ 和 k_2 为任意实数）．

26．当 $a=-\frac{1}{6}$ 时，方程组有解．通解为：$x=\begin{pmatrix}-1\\-\frac{5}{6}\\-\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$，（$k$ 为任意实数）.

27．所求方程组为 $x_1+2x_2-3x_3=0$.

四、证明题

1．设 $\boldsymbol{\alpha}$ 为 $\boldsymbol{Ax}=0$ 的非零解，$\boldsymbol{\beta}$ 为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ ($\boldsymbol{b}\neq 0$)的解，证明 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 线性无关.

证法一：设有 k_1,k_2，使 $k_1\boldsymbol{\alpha}+k_2\boldsymbol{\beta}=0$，因为 $\boldsymbol{\alpha}$ 为 $\boldsymbol{Ax}=0$ 的非零解，$\boldsymbol{\beta}$ 为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ ($\boldsymbol{b}\neq 0$) 的解，故 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{k}_1\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{k}_2\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{k}_1\boldsymbol{A\alpha}+\boldsymbol{k}_2\boldsymbol{A\beta}=\boldsymbol{k}_2\boldsymbol{b}=0$，从而 $k_2=0$，即 $k_1\boldsymbol{\alpha}+k_2\boldsymbol{\beta}=k_1\boldsymbol{\alpha}=0$；又因为 $\boldsymbol{\alpha}\neq 0$，所以 $k_1=0$，因此 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 线性无关.

证法二：（反证法）假设两向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 线性相关，则必存在一非零实数 k，使得 $\boldsymbol{\beta}=k\boldsymbol{\alpha}$，从而 $\boldsymbol{A\beta}=k\,\boldsymbol{A\alpha}=0$，与 $\boldsymbol{\beta}$ 为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ ($\boldsymbol{b}\neq 0$)的解矛盾，故 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 线性无关.

2．设 $\boldsymbol{\eta}$ 为非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的一个解，$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_r$ 是其导出组 $\boldsymbol{Ax}=0$ 的一个基础解系．证明 $\boldsymbol{\eta},\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_r$ 线性无关.

反证法一：因为 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_r$ 是 $\boldsymbol{Ax}=0$ 的基础解系，所以 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_r$ 线性无关．若 $\boldsymbol{\eta},\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_r$ 线性相关，则 $\boldsymbol{\eta}$ 必可由 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_r$ 线性表出，从而 $\boldsymbol{\eta}$ 为 $\boldsymbol{Ax}=0$ 的解，这与 $\boldsymbol{\eta}$ 为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解矛盾，故 $\boldsymbol{\eta},\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_r$ 线性无关.

反证法二：若 $\boldsymbol{\eta},\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_r$ 线性相关，则存在不全为零的数 $l,k_1,k_2,\cdots,k_r$，使 $l\boldsymbol{\eta}+k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots k_r\xi_r=0$. 若 $l\neq 0$，则 $\boldsymbol{\eta}=-\frac{k_1}{l}\xi_1-\frac{k_2}{l}\xi_2-\cdots-\frac{k_r}{l}\xi_r$，即 $\boldsymbol{\eta}$ 可以由 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_r$ 线性表出，由此可得 $\boldsymbol{\eta}$ 为 $\boldsymbol{Ax}=0$ 的解，与 $\boldsymbol{\eta}$ 为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解矛盾，故 $l=0$．从而 $k_1,k_2,\cdots,k_r$ 不全为零，使 $k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots k_r\xi_r=0$，这表明 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_r$ 线性相关，与 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_r$ 为 $\boldsymbol{Ax}=0$ 的基础解系矛盾，所以 $\boldsymbol{\eta},\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_r$ 线性无关.

3．若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$($\boldsymbol{b}\neq 0$)的线性无关解，证明 $\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1$ 是对应齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=0$ 的线性无关解.

证明：因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$($\boldsymbol{b}\neq 0$)的线性无关解，由非齐次线性方程组的解的结构性质得，$\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1$ 是对应齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=0$ 的解．下证其线性无关性，设存在常数 k_1,k_2，使得 $k_1(\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_1)+k_2(\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1)=-(k_1+k_2)\boldsymbol{\alpha}_1+k_1\boldsymbol{\alpha}_2+k_2\boldsymbol{\alpha}_3=0$，由于 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，所以 $-(k_1+k_2)=k_1=k_2=0$，即 $k_1=k_2=0$，故 $\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1$ 也线性无关.

综上所述，$\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1$ 是对应齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=0$ 的线性无关解.

4．设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 实矩阵，$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵．证明：线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=0$ 只有零解.

证明：因为 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵，所以 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 为 n 阶的可逆矩阵，故齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}=0$ 只有零解.

显然 $\boldsymbol{Ax}=0\Rightarrow \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}=0$ ；又因为 $\boldsymbol{Ax}$ 是一个 n 维列向量，所以

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}=0\Rightarrow \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}=0\Rightarrow (\boldsymbol{Ax})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}=0\Rightarrow \boldsymbol{Ax}=0\text{ ,}$$

故方程组 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}=0$ 与 $\boldsymbol{Ax}=0$ 同解，即 $\boldsymbol{Ax}=0$ 只有零解.

5．设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，证明齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=0$ 与 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}=0$ 同解.

证明：设 $\boldsymbol{\alpha}$ 是 $\boldsymbol{Ax}=0$ 的解，则 $\boldsymbol{A\alpha}=0$，用 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 左乘等式两边，有 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A\alpha}=0$，从而 $\boldsymbol{\alpha}$ 是 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}=0$ 的解．反之，设 $\boldsymbol{\alpha}$ 是 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}=0$ 的解，则 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A\alpha}=0$，用 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 左乘等式两边，有 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A\alpha}=(\boldsymbol{A\alpha})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A\alpha})=0$，从而 $\boldsymbol{\alpha}$ 也是 $\boldsymbol{Ax}=0$ 的解.

综上，方程组 $\boldsymbol{Ax}=0$ 与方程组 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}=0$ 同解.

第 5 章　特征值与特征向量

【考核要求】

学习本章，要求熟练掌握实方阵的特征值和特征向量的定义与求法；知道特征值与特征向量的性质；清楚两个同阶方阵相似的定义和性质；理解方阵与对角矩阵相似的条件并会用相似变换化方阵为对角矩阵；会计算两个实向量的内积和向量的长度，会判定两个向量是否正交；了解正交向量组的定义，会用施密特方法把线性无关向量组化为等价的正交单位向量组；了解正交矩阵的定义、性质及其判定方法；了解实对称矩阵的特征值和特征向量的性质；会用正交矩阵化实对称矩阵为对角矩阵.

本章重点：求实方阵的特征值和特征向量；方阵可相似对角化的条件和方法；方阵的相似对角化；实对称矩阵的正交相似对角化.

难点：方阵与实对称矩阵的相似标准形的求法.

考点 1　特征值与特征向量的定义及求解

【考点内容】

1．特征值与特征向量的定义

定义 5.1.1　设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 为 n 阶实方阵，如果存在某个数 λ 和某个 n 维非零列向量 $\boldsymbol{p}$ 满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}=\lambda\boldsymbol{p}$，则 λ 称为是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值，称 $\boldsymbol{p}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于这个特征值 λ 的一个特征向量.

为了给出具体求特征值和特征向量的方法，可将 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}=\lambda\boldsymbol{p}$ 改写成 $(\lambda\boldsymbol{E}_n-\boldsymbol{A})\boldsymbol{p}=0$. 再把 λ 看成待定参数，那么 $\boldsymbol{p}$ 就是齐次线性方程组 $(\lambda\boldsymbol{E}_n-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=0$ 的任意一个非零解. 显然，它有非零解当且仅当它的系数行列式为零：$|\lambda\boldsymbol{E}_n-\boldsymbol{A}|=0$. 因此，求特征值 λ 就是求特征方程 $|\lambda\boldsymbol{E}_n-\boldsymbol{A}|=0$ 的根；求特征值 λ 对应的特征向量 $\boldsymbol{p}$ 就是齐次线性方程组 $(\lambda\boldsymbol{E}_n-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=0$ 的非零解.

注意：几阶的方阵有几个特征值，出现重根时，按重数计算. 零向量不能作为特征向量，但特征值可以取 0.

2．特征值与特征向量的求解

（1）定义法

定义 5.1.2　带参数 λ 的 n 阶方阵 $\lambda\boldsymbol{E}_n-\boldsymbol{A}$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的特征方阵，它的行列式 $|\lambda\boldsymbol{E}_n-\boldsymbol{A}|$

称为 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式，称$|\lambda \boldsymbol{E}_n-\boldsymbol{A}|=0$为 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程.

由定义可知, 求 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值就是求它的特征方程$|\lambda \boldsymbol{E}_n-\boldsymbol{A}|=0$的 n 个根. 对于任意取定的一个特征值 λ_0，$\boldsymbol{A}$ 的属于这个特征值 λ_0 的特征向量，就是对应的齐次线性方程组$(\lambda_0 \boldsymbol{E}_n-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系，其线性组合就为属于 λ_0 的全体特征向量.

求方阵的特征值与特征向量的思路：

① 写出特征多项式$|\lambda \boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|$，并计算出结果，此时就是行列式计算．若 9 个元素均不为 0，一定要用初等变换法，化出一行或列存在公因式的，然后再算出结果，如例 9；

② 由特征方程$|\lambda \boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$，即可解出特征值，要知道几阶的方阵就有几个特征值，出现重根按重数计算；

③ 对所有特征值逐个求出它们所对应的特征向量，就是求解特征值 λ 对应的齐次线性方程组$(\lambda \boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=0$ 的基础解系，只是这个地方不说是基础解系是特征向量罢了；

④ 若求属于每个特征值 λ 的特征向量全体，就是对应齐次线性方程组的通解，只是通解的系数 k_1，k_2 现是不全为 0 的任意实数.

（2）利用相关定理或结论

因为方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 λ 满足特征方程$|\lambda \boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$, 所以若存在常数 $a, b\,(b\neq 0)$, 有$|a\boldsymbol{E}+b\boldsymbol{A}|=0$ 成立，则方阵 $\boldsymbol{A}$ 必存在一个特征值 $\lambda=-\dfrac{a}{b}$．另外，还有

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}=\lambda\boldsymbol{p}\Rightarrow \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}=\lambda\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{p}\Rightarrow \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{p}=\lambda^{-1}\boldsymbol{p}=\frac{1}{\lambda}\boldsymbol{p}(\lambda\neq 0),$$

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}=\lambda\boldsymbol{p}\Rightarrow \boldsymbol{A}^{*}\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}=\lambda\boldsymbol{A}^{*}\boldsymbol{p}\Rightarrow|\boldsymbol{A}|\,\boldsymbol{p}=\lambda\boldsymbol{A}^{*}\boldsymbol{p}\Rightarrow \boldsymbol{A}^{*}\boldsymbol{p}=\frac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda}\boldsymbol{p}(\lambda\neq 0).$$

定理 5.1.1　n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 和它的转置矩阵 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 必有相同的特征值.

定理 5.1.2　设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 的全体特征值，则必有 $\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i=\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ii}=\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})$，$\prod\limits_{i=1}^{n}\lambda_i=|\boldsymbol{A}|$．这里，$\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})$为 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 中的 n 个对角元之和，称为 $\boldsymbol{A}$ 的迹．$|\boldsymbol{A}|$为 $\boldsymbol{A}$ 的行列式.

注意：该定理给出一个方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值与它的对角元及其行列式之间的关系，并可借该关系求解二阶方阵的特征值，是历年真题常考核的一个知识点.

定理 5.1.3　设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵，$f(x)=a_m x^m+a_{m-1}x^{m-1}+\cdots+a_1 x+a_0$ 为 m 次多项式，

$$f(\boldsymbol{A})=a_m\boldsymbol{A}^m+a_{m-1}\boldsymbol{A}^{m-1}+\cdots+a_1\boldsymbol{A}+a_0\boldsymbol{E}_n$$

为对应的 $\boldsymbol{A}$ 的方阵多项式．如果 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}=\lambda\boldsymbol{p}$，即 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值，那么 $f(\lambda)$ 一定是 $f(\boldsymbol{A})$的特征值. 这说明 $f(\lambda)$ 必是 $f(\boldsymbol{A})$的特征值. 特别, 当 $f(\boldsymbol{A})=0$ 时, 必有 $f(\lambda)=0$, 即当 $f(\boldsymbol{A})=0$ 时 $\boldsymbol{A}$ 的特征值必是对应的 m 次多项式 $f(x)$的根.

【典型例题】

【例 5-1】矩阵$\begin{pmatrix}-3 & 1\\ 1 & -3\end{pmatrix}$有一个特征值为（　　）.

A.-3　　B. -2　　C. 1　　D. 2

解：选 B. 法一，求解特征方程$\begin{vmatrix}\lambda+3 & -1\\ -1 & \lambda+3\end{vmatrix}=0$，可得$\lambda_1=-2$，$\lambda_2=-4$；法二，利用定理 5.1.2，有$\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2=-6\\ \lambda_1\lambda_2=8\end{cases}$，解得$\lambda_1=-2$，$\lambda_2=-4$.

【例 5-2】若$|5\boldsymbol{E}_n+\boldsymbol{A}|=0$，则$\boldsymbol{A}$一定有特征值（　　）.

A. -5　　B. $-\dfrac{1}{5}$　　C. $\dfrac{1}{5}$　　D. 5

解：选 A. 由$|a\boldsymbol{E}+b\boldsymbol{A}|=0\Rightarrow\lambda=-\dfrac{a}{b}$可得，一定有特征值$-5$.

【例 5-3】设 3 阶矩阵$\boldsymbol{A}$的一个特征值为-3，则$-\boldsymbol{A}^2$必有一个特征值为（　　）.

A. -9　　B. -3　　C. 3　　D. 9

解：选 A. 由定理 5.1.3 可得，$f(\boldsymbol{A})=-\boldsymbol{A}^2$，其必有一个特征值为$f(-3)=-(-3)^2=-9$.

【例 5-4】设 3 阶方阵$\boldsymbol{A}$的特征多项式为$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=(\lambda+2)(\lambda+3)^2$，则$|\boldsymbol{A}|=$（　　）.

A. -18　　B. -6　　C. 6　　D. 18

解：选 A. 由题意可知，方阵$\boldsymbol{A}$的三个特征值为$-2,-3,-3$，所以由定理 5.1.2 得，$|\boldsymbol{A}|=-18$.

【例 5-5】已知 3 阶矩阵$\boldsymbol{A}$的 3 个特征值为 1，2，3，则$|\boldsymbol{A}^*|=$__________.

解：答案为 36. 由定理 5.1.2 可知，$|\boldsymbol{A}|=6$，从而$|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^2=36$.

【例 5-6】设矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\\ 0 & a & 0\\ -4 & 1 & 3\end{pmatrix}$有一个特征值$\lambda=2$，对应的特征向量为$x=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$，则数$a=$_________.

解：答案为 2. 由题意可知，$\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\\ 0 & a & 0\\ -4 & 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}\Rightarrow 2a=4\Rightarrow a=2$.

【例 5-7】已知-2 是矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & -2\\ 2 & x\end{pmatrix}$的特征值，则数$x=$__________.

解:答案为-4. 设另一特征值为λ，则由定理 5.1.2 可得，$\begin{cases}-2+\lambda=x\\ -2\lambda=4\end{cases}$，解$\lambda=-2, x=-4$.

【例 5-8】设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -6 & -3\\ 0 & -5 & -3\\ 0 & 6 & 4\end{pmatrix}$，求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值和特征向量.

解： 由 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 6 & 3\\ 0 & \lambda+5 & 3\\ 0 & -6 & \lambda-4\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda+2)=0$，得矩阵 $\boldsymbol{A}$ 特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1, \lambda_3=-2$.

当 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 时，齐次线性方程组 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=0$ 所对应的等价方程组为 $2x_2+x_3=0$，x_1, x_3 为自由未知量，

得其对应的特征向量为 $\boldsymbol{p}_1=(1,0,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{p}_2=(0,-1,2)^{\mathrm{T}}$，则 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 对应的全部特征向量为 $k_1\boldsymbol{p}_1+k_2\boldsymbol{p}_2$（$k_1, k_2$ 是不全为零的任意实数）；

当 $\lambda_3=-2$ 时，齐次线性方程组 $(-2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=0$ 所对应的等价方程组为 $\begin{cases}x_1+x_3=0\\ x_2+x_3=0\end{cases}$，$x_3$ 为自由未知量，得其对应的特征向量为 $\boldsymbol{p}_3=(-1,-1,1)^{\mathrm{T}}$，则 $\lambda_3=-2$ 对应的全部特征向量为 $k_3\boldsymbol{p}_3$（k_3 为任意的非零实数）.

【例 5-9】已知 2 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=1, \lambda_2=9$，对应的特征向量依次为 $\boldsymbol{\alpha}_1=(-1,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(7,1)^{\mathrm{T}}$，求矩阵 $\boldsymbol{A}$.

解： 因为 2 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有 2 个线性无关的特征向量，所以矩阵 $\boldsymbol{A}$ 相似于对角矩阵，即存在可逆矩阵.

$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}-1 & 7\\ 1 & 1\end{pmatrix}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 9\end{pmatrix}$. 从而，

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & 7\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 7\\ 1 & 1\end{pmatrix}^{-1}=-\frac{1}{8}\begin{pmatrix}-1 & 63\\ 1 & 9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -7\\ -1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & 7\\ 1 & 2\end{pmatrix}.$$

【同步练习及参考答案】

一、单项选择题

1．设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵，且 $|5\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E}|=0$，则 $\boldsymbol{A}$ 必有一个特征值为（　　）.

A．$-\dfrac{5}{3}$　　B．$-\dfrac{3}{5}$　　C．$\dfrac{3}{5}$　　D．$\dfrac{5}{3}$

2．设三阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值分别为 $\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, 3$，则 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的特征值为（　　）.

A．$2, 4, \dfrac{1}{3}$　　B．$\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{3}$　　C．$\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, 3$　　D．$2, 4, 3$

3．设 -2 是 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值，则 $\boldsymbol{A}^2$ 必有一个特征值为（　　）.

A. -8　　B. -4　　C. 4　　D. 8

4. 设 $\lambda=3$ 是可逆矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值，则矩阵 $\left(\frac{1}{4}\boldsymbol{A}\right)^{-1}$ 有一个特征值等于（　　）.

A. $-\frac{4}{3}$　　B. $-\frac{3}{4}$　　C. $\frac{3}{4}$　　D. $\frac{4}{3}$

5. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为（　　）.

A. 1,1,0　　B. -1,1,1　　C. 1,1,1　　D. 1,-1,-1

6. 矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$ 的非零特征值为（　　）.

A. 4　　B. 3　　C. 2　　D. 1

7. 设 $\lambda=2$ 是可逆矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值，则矩阵 $(\boldsymbol{A}^2)^{-1}$ 必有一个特征值等于（　　）.

A. $\frac{1}{4}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. 2　　D. 4

8. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵，且已知 $|3\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}|=0$，则 $\boldsymbol{A}$ 必有一个特征值为（　　）.

A. $-\frac{3}{2}$　　B. $-\frac{2}{3}$　　C. $\frac{2}{3}$　　D. $\frac{3}{2}$

9. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&3&-1\\1&1&1\end{pmatrix}$ 的三个特征值分别为 λ_1，λ_2，λ_3，则 $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=$（　　）.

A. 4　　B. 5　　C. 6　　D. 7

10. 设 $\boldsymbol{A}$ 为可逆矩阵，则与 $\boldsymbol{A}$ 必有相同特征值的矩阵为（　　）.

A. $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$　　B. $\boldsymbol{A}^2$　　C. $\boldsymbol{A}^{-1}$　　D. $\boldsymbol{A}^*$

11. 设 λ_1，λ_2，λ_3 为矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&9&0\\0&4&5\\0&0&2\end{pmatrix}$ 的三个特征值，则 $\lambda_1\lambda_2\lambda_3=$（　　）.

A. 20　　B. 24　　C. 28　　D. 30

12. 设三阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 1，2，-1，则 $|\boldsymbol{A}|=$（　　）.

A. -3　　B. -2　　C. 2　　D. 3

13. 设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-3&3\\3&-5&3\\6&-6&4\end{pmatrix}$，则下列向量中是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 -2 的特征向量为（　　）.

A. $\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ C. $\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$

14．设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\2&1&2\\3&1&2\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 $\lambda=0$ 的特征向量为（　　）.

A. $(0,0,0)^{\mathrm{T}}$ B. $(0,2,-1)^{\mathrm{T}}$ C. $(1,0,-1)^{\mathrm{T}}$ D. $(0,1,1)^{\mathrm{T}}$

15．设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4&-5&2\\5&-7&3\\6&-9&4\end{pmatrix}$，则以下向量中是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量的是（　　）.

A. $(1,1,1)^{\mathrm{T}}$ B. $(1,1,3)^{\mathrm{T}}$ C. $(1,1,0)^{\mathrm{T}}$ D. $(1,0,-3)^{\mathrm{T}}$

二、填空题

1．已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&x\end{pmatrix}$ 的一个特征值为 0，则 $x=$____________.

2．设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶可逆矩阵，已知 $\boldsymbol{A}$ 有一个特征值为 2，则 $(2\boldsymbol{A})^{-1}$ 必有一个特征值为____________.

3．已知 $\boldsymbol{A}$ 有一个特征值-2，则 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{E}$ 必有一个特征值____________.

4．已知 $\lambda=0$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&-2&-2\\2&2&-2\\-2&-2&2\end{pmatrix}$ 的 2 重特征值，则 $\boldsymbol{A}$ 的另一特征值为____________.

5．设 n 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值是-3，则矩阵 $\left(\dfrac{1}{3}\boldsymbol{A}^2\right)^{-1}$ 必有一个特征值为____________.

6．设 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 的非零特征值是____________.

7．设 2 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值，则矩阵 $3\boldsymbol{A}$ 必有一个特征值为____________.

8．矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$ 的特征值是____________.

9．设 3 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 2，且 $\boldsymbol{A}^2+5\boldsymbol{A}=0$，则 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值为____________.

10．设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵，且 $|\boldsymbol{A}|=6$，若 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值为 2，则 $\boldsymbol{A}^*$ 必有一个特征值

为______________.

11．设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 4\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}$ 的特征值是____________.

12．设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵，且满足$|\boldsymbol{E}+2\boldsymbol{A}|=0$，则 $\boldsymbol{A}$ 必有一个特征值为________.

13．设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 0 & 5\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}$ 的一个特征值为 2，则 $\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}$ 的另一个特征值为____________.

14．设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $|3\boldsymbol{E}+2\boldsymbol{A}|=0$，则 $\boldsymbol{A}$ 必有一个特征值为________.

15．矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$的全部特征向量是____________.

16．已知 3 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 1，-3，9，则$\left|\frac{1}{3}\boldsymbol{A}\right|=$__________.

17．设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶方阵，特征值分别为-2，$\frac{1}{2}$，1，则$|5\boldsymbol{A}^{-1}|=$_______________.

18．设方阵 $\boldsymbol{A}$ 有一个特征值为 0，则$|\boldsymbol{A}^3|=$_______________.

19．设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵，若 $\boldsymbol{A}$ 的三个特征值分别为 1，2，3，则$|\boldsymbol{A}|=$______________.

20．设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵，2 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个 2 重特征值，-1为它的另一个特征值，则$|\boldsymbol{A}|=$_____________.

21．矩阵$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}$的两个特征值之积为______________.

22．设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -2 & -2\\ -2 & x & 0\\ -2 & 0 & 0\end{pmatrix}$的特征值为 4，1，-2，则数 $x=$________________.

三、计算题

1．已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 7 & 11\end{pmatrix}$，求其特征值与特征向量.

2．求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & -1 & -1\\ -1 & 0 & -1\\ -1 & -1 & 0\end{pmatrix}$的全部特征值及对应的全部特征向量.

3．求矩阵$\begin{pmatrix}2 & 3 & 2\\ 1 & 8 & 2\\ -2 & -14 & -3\end{pmatrix}$的特征值和特征向量.

4．设三阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1 & 4 & 3\\ -2 & 5 & 3\\ 2 & -4 & -2\end{pmatrix}$，求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值和特征向量.

5．求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ 的全部特征值和全部特征向量.

6．设三阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的三个特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=0,\lambda_3=-1$，且 $\boldsymbol{A}$ 的属于 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 的特征向量依次为 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}0\\2\\5\end{pmatrix}$，求矩阵 $\boldsymbol{A}$.

7．已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & -1 & 2\\ 5 & a & 3\\ -1 & b & -2\end{pmatrix}$ 的一个特征向量 $\boldsymbol{\xi}=(1, 1, -1)^{\mathrm{T}}$，求 a, b 及 $\boldsymbol{\xi}$ 所对应的特征值，并写出对应于这个特征值的全部特征向量.

四、证明题

1．设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}$，证明 $\boldsymbol{A}$ 的特征值只能是 ±1.

2．设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵，k 为正整数，且 $\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{0}$，证明 $\boldsymbol{A}$ 的特征值均为 0.

3．已知 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，且满足方程 $\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$，证明 $\boldsymbol{A}$ 的特征值只能是 0 或-2.

参考答案

一、单项选择题

1．B　2．A　3．C　4．D　5．B　6．B　7．A　8．B

9．B　10．A　11．B　12．B　13．B　14．B　15．A

二、填空题

1．1　2．$\frac{1}{4}$　3．6　4．4　5．$\frac{1}{3}$　6．14　7．6　8．1，1，-1

9．$0,-5,-5$　10．3　11．3，3　12．$-\frac{1}{2}$　13．20　14．$-\frac{3}{2}$

15．$k_1(1,0,0)^{\mathrm{T}}+k_2(0,1,0)^{\mathrm{T}}+k_3(0,0,1)^{\mathrm{T}}$，$k_1,k_2,k_3$ 是不全为零的实数　16．-1

17．-125　18．0　19．6　20．-4　21．-1　22．2

三、计算题

1．特征值 $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = 10$，对应的特征向量分别为 $\boldsymbol{p}_1 = (1,-1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{p}_2 = (1,-7)^{\mathrm{T}}$.

2．特征值 $\lambda_1 = -2$，对应的全部特征向量为 $k_1(1,1,1)^{\mathrm{T}}$，k_1 为非零实数；

特征值 $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$，对应的全部特征向量为 $k_2(1,-1,0)^{\mathrm{T}} + k_3(1,0,-1)^{\mathrm{T}}$，$k_2, k_3$ 是不全为零的实数.

3．特征值 $\lambda_1 = 1$，$\lambda_2 = \lambda_3 = 3$，$\lambda_1 = 1$ 对应的特征向量 $p_1 = (-2,0,1)^{\mathrm{T}}$；$\lambda_2 = \lambda_3 = 3$ 对应的特征向量 $p_2 = (1,-1,2)^{\mathrm{T}}$.

4．特征值 $\lambda_1 = 0$，$\lambda_2 = \lambda_3 = 1$，$\lambda_1 = 0$ 对应的特征向量 $p_1 = (1,1,-1)^{\mathrm{T}}$；$\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ 对应的特征向量 $p_2 = (2,1,0)^{\mathrm{T}}$，$p_3 = (3,0,2)^{\mathrm{T}}$.

5．特征值 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$，对应的全部特征向量为 $k(1,0,0)^{\mathrm{T}}$，k 为非零实数.

6．$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 10 & -5 \end{pmatrix}$.

7．$a = -3, b = 0$，$\boldsymbol{\xi}$ 所对应的特征值 -1，对应的全部特征向量为 $k(1,1,-1)^{\mathrm{T}}$，k 为非零实数.

四、证明题

1．证明：设 $\boldsymbol{\xi}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 λ 的特征向量，则有 $\boldsymbol{A\xi} = \lambda\boldsymbol{\xi}$．于是由 $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{E}$，得 $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{E\xi} = \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\xi} = \lambda^2\boldsymbol{\xi}$，从而 $\left(1-\lambda^2\right)\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{0}$．而 $\boldsymbol{\xi} \neq \boldsymbol{0}$，所以有 $1-\lambda^2 = 0$，即 $\lambda = \pm 1$.

2．证明：设 λ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，且存在向量 $\boldsymbol{p}$ 使得 $\boldsymbol{Ap} = \lambda\boldsymbol{p}$，由此可得 $\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{p} = \lambda^k\boldsymbol{p}$．又因 $\boldsymbol{A}^k = \boldsymbol{0}$，故 $\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{p} = 0$，从而 $\lambda^k\boldsymbol{p} = 0$，而 $\boldsymbol{p} \neq 0$，所以 $\lambda^k = 0$，即 $\lambda = 0$．因此 $\boldsymbol{A}$ 的特征值均为 0.

3. 证明 :设 λ 为方阵 $\boldsymbol{A}$ 的任一特征值，$\boldsymbol{p}$ 为 λ 对应的特征向量, 则有 $\boldsymbol{Ap} = \lambda\boldsymbol{p}$ $(\boldsymbol{p} \neq 0)$，从而 $(\boldsymbol{A}^2 + 2\boldsymbol{A})\boldsymbol{p} = (\lambda^2 + 2\lambda)\boldsymbol{p} = \boldsymbol{0}$，因为 $\boldsymbol{p} \neq 0$，所以 $\lambda^2 + 2\lambda = 0$，得 $\lambda = 0$ 或 -2，故 $\boldsymbol{A}$ 的特征值只能是 0 或-2.

考点 2　方阵的相似变换

【考点内容】

1．相似的定义

定义 5.2.1　设 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 是两个 n 阶方阵．如果存在某个 n 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$，则称 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 是相似的，记为 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$.

当两个 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 之间存在等式 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ 时, 我们就说 $\boldsymbol{A}$ 经过相似变换变成

了 $\boldsymbol{B}$.

定理 5.2.1 相似矩阵必有相同的特征多项式, 因而必有相同的特征值、相同的迹和相同的行列式.

注意：该定理给出两个相似方阵的特征值、迹和其行列式之间的关系, 是历年真题常考核的一个重要知识点.

推论 若 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 与对角矩阵或三角矩阵相似：

$$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix} \text{或} \boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & * & \cdots & * \\ & \lambda_2 & \cdots & * \\ & & \ddots & * \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}.$$

则其中的 n 个对角元 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 就是 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值.

这是由于三角矩阵的特性值就是它的对角元全体. 对角矩阵是特殊的三角矩阵.

2. 相似与等价的关系

两个矩阵相似一定等价, 但等价不一定相似. 因为等价的矩阵有相同的秩, 所以两相似矩阵必有相同的秩. 但有相同秩的矩阵, 它们不一定等价, 也不一定相似. 若是同型矩阵有相同的秩, 那么它们等价, 但不一定相似.

3. 方阵相似于对角矩阵（方阵的可对角化）

定理 5.2.2 n 阶方阵 A 相似于对角矩阵 $\Leftrightarrow A$ 有 n 个线性无关的特征向量.

定理 5.2.3 设 $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2$ 分别是 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的属于两个不同特征值 λ_1 和 λ_2 的特征向量, 则 $\boldsymbol{p}_1$ 和 $\boldsymbol{p}_2$ 必线性无关.

定理 5.2.4 设 $\lambda_1,\cdots\lambda_2,\cdots,\lambda_k$ 是 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的两两不同的特征值, $\boldsymbol{p}_i$ 是属于 λ_i 的特征向量, $1\leq i\leq k$, 则 $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \cdots, \boldsymbol{p}_k$ 是线性无关组.

n 阶方阵 A 相似于对角矩阵 $\Leftrightarrow$ 对于每一个 r_i 重特征值 λ_i, 均存在 r_i 个线性无关的特征向量.

任意一个无重特征值的方阵一定相似于对角矩阵.

对角元两两互异的三角矩阵一定相似于对角矩阵.

以 3 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 为例, 求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}$(或求 $\boldsymbol{A}$ 相似标准形, 或问 $\boldsymbol{A}$ 是否能相似于对角矩阵), 解题思路：

（1）根据考点 1, 先求出方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 λ_1, λ_2, λ_3, 与线性无关的特征向量 $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2$, $\boldsymbol{p}_3$；

（2）若求得的线性无关的特征向量个数与该方阵的阶数相等, 则该方阵能相似于对角矩阵, 可对角化, 即可直接构造可逆矩阵 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3)$, 就有

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3).$$

【典型例题】

【例 5-10】若 2 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 相似于矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 2 & -3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{E}$ 为 2 阶单位矩阵，则与矩阵 $\boldsymbol{E}$-$\boldsymbol{A}$ 相似的矩阵是（　　）.

A. $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 4\end{pmatrix}$　　B. $\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & -4\end{pmatrix}$　　C. $\begin{pmatrix}-1 & 0\\ -2 & 4\end{pmatrix}$　　D. $\begin{pmatrix}-1 & 0\\ -2 & -4\end{pmatrix}$

解：选 C. 特征矩阵法：因为相似的方阵有相同的特征值，所以 $\boldsymbol{A}$ 的两个特征值为 $2,-3$，就取 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & \\ & -3\end{pmatrix}$，从而 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1 & \\ & 4\end{pmatrix}$，只有 C 选项的特征值与其相符.

【例 5-11】设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & & \\ & 2 & \\ & & -1\end{pmatrix}$，则与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 相似的矩阵是（　　）.

A. $\begin{pmatrix}1 & -1 & \\ -1 & 2 & \\ & & 3\end{pmatrix}$　　B. $\begin{pmatrix}0 & 1 & \\ 1 & 0 & \\ & & 2\end{pmatrix}$　　C. $\begin{pmatrix}-2 & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{pmatrix}$　　D. $\begin{pmatrix}1 & & \\ & -2 & \\ & & 1\end{pmatrix}$

解：选 B. 根据相似方阵有相同的迹和其行列式值也相同，即可选出 B.

【例 5-12】下列说法错误的是（　　）.

A. 两个同阶方阵秩相等，则它们等价

B. 两个同阶方阵等价，则它们的秩相等

C. 两个同阶方阵相似，则它们一定等价

D. 两个同阶方阵等价，则它们一定相似

解：选 D. 根据矩阵相似与等价的关系，可知选 D.

【例 5-13】设 3 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 1, -1, 2, 则下列矩阵中为可逆矩阵的是(　　).

A. $\boldsymbol{E}$-$\boldsymbol{A}$　　B. -$\boldsymbol{E}$-$\boldsymbol{A}$　　C. 2$\boldsymbol{E}$-$\boldsymbol{A}$　　D. -2$\boldsymbol{E}$-$\boldsymbol{A}$

解：选 D. 特征矩阵法：取 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & & \\ & -1 & \\ & & 2\end{pmatrix}$，可知只有 D 选项行列式值不为零，是可逆矩阵.

【例 5-14】设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有一个特征值 3，则|-3$\boldsymbol{E}$+$\boldsymbol{A}$|=____________.

解：答案为 0. 特征矩阵法 取 $\boldsymbol{A}$ 为主对角线上有一个元素为 3 的对角矩阵, 则-3$\boldsymbol{E}$+$\boldsymbol{A}$ 主对角线上就有一个元素为 0，从而其行列式值为 0.

【例 5-15】设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵，$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=2$，若存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$，则 $\mathrm{r}(\boldsymbol{B})=$____________.

解：答案为 2．由相似矩阵有相同的秩即可得.

【例 5-16】设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&&\\&3&\\&&-3\end{pmatrix}$ 相似，则$|\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{E}|=$____________.

解：答案为 192．特殊矩阵法：取 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&&\\&3&\\&&-3\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}3&&\\&8&\\&&8\end{pmatrix}$，从而行列式值为 192.

【例 5-17】若 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&1\\0&1&\boldsymbol{x}\end{pmatrix}$ 与 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$ 相似，则 $x=$____________.

解：答案为 0．由相似矩阵有相同的迹即可得.

【例 5-18】设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&2&-2\\0&-1&0\\4&2&-3\end{pmatrix}$，求可逆方阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ 为对角矩阵.

解：由于 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-3&-2&2\\0&\lambda+1&0\\-4&-2&\lambda+3\end{vmatrix}=(\lambda+1)^2(\lambda-1)$，得 $\boldsymbol{A}$ 的三个特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=-1,\lambda_3=1$.

对特征值 $\lambda_1=\lambda_2=-1$ 对应的特征向量满足 $\begin{cases}-4x_1-2x_2+2x_3=0\\-4x_1-2x_2+2x_3=0\end{cases}$，即 $-2x_1-x_2+x_3=0$，得两个线性无关的解：$\boldsymbol{\alpha}_1=(-1,2,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,2)^{\mathrm{T}}$；

对特征值 $\lambda_3=1$ 对应的特征向量满足 $\begin{cases}-2x_1-2x_2+2x_3=0\\2x_2=0\\-4x_1-2x_2+4x_3=0\end{cases}$，即 $x_1=x_3$，$x_2=0$，令 $x_3=1$，得 $\boldsymbol{\alpha}_3=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$.

令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=\begin{pmatrix}-1&1&1\\2&0&0\\0&2&1\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{P}$ 为可逆方阵，且有 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}-1&&\\&-1&\\&&1\end{pmatrix}$.

【例 5-19】已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&1\\0&1&x\end{pmatrix}$ 与 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&y&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$ 相似，求参数 x 与 y 的值.

解：因为 $|\boldsymbol{A}|=-2$，$|\boldsymbol{B}|=-2y$，所以由相似矩阵有相同的迹和相同的行列式得

$\begin{cases}-2=-2y \\ 2+x=2+y-1\end{cases}$，解得$\begin{cases}x=0 \\ y=1\end{cases}$.

【同步练习及参考答案】

一、单项选择题

1．设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}$ 的线性无关的特征向量的个数是（　　）.

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

2．设 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 是两个相似 n 阶矩阵，则下列说法错误的是（　　）.

A．$|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|$　　B．秩($\boldsymbol{A}$) = 秩($\boldsymbol{B}$)

C．存在可逆阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$　　D．$\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}$

3．设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，且已知 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 2，2，3，则 $|\boldsymbol{B}^{-1}|=$（　　）.

A．$\dfrac{1}{12}$　　B．$\dfrac{1}{7}$　　C．7　　D．12

4．若 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，则（　　）.

A．$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 都和同一对角矩阵相似　　B．$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 有相同的特征向量

C．$\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}=\boldsymbol{B}-\lambda\boldsymbol{E}$　　D．$|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|$

5．已知矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与对角矩阵 $\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$ 相似，则 $\boldsymbol{A}^2=$（　　）.

A．$\boldsymbol{A}$　　B．$\boldsymbol{D}$　　C．$\boldsymbol{E}$　　D．$-\boldsymbol{E}$

6．设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$，则下列矩阵中与 $\boldsymbol{A}$ 相似的是（　　）.

A．$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$　　B．$\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$　　C．$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$　　D．$\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

7．若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与对角矩阵 $\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ 相似，则 $\boldsymbol{A}^3=$（　　）.

A．$\boldsymbol{E}$　　B．$\boldsymbol{D}$　　C．$\boldsymbol{A}$　　D．$-\boldsymbol{E}$

8．若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与对角矩阵 $\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}-1 & & \\ & -1 & \\ & & -1\end{pmatrix}$ 相似，则 $\boldsymbol{A}^2=$（　　）.

A．$\boldsymbol{E}$　　B．$\boldsymbol{A}$　　C．$-\boldsymbol{E}$　　D．$2\boldsymbol{E}$

9．若 3 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 与对角阵 $\boldsymbol{\varLambda}=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$ 相似，则下列说法错误的是（　　）.

A．$|\boldsymbol{A}|=0$　　B．$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|=0$

C．$\boldsymbol{A}$ 有三个线性无关特征向量　　D．$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=2$

10．设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶方阵，其特征值分别为 2, 1, 0，则 $|\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}|=$（　　）.

A．0　　B．2　　C．3　　D．24

11．若同阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价，则必有（　　）.

A．$|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|$　　B．$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似　　C．$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{B})$　　D．$\sum_{i=1}^{n}a_{ii}=\sum_{i=1}^{n}b_{ii}$

12．设 3 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=0$，$\lambda_3=2$，则秩$(\boldsymbol{A})=$（　　）.

A．0　　B．1　　C．2　　D．3

13．设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n(n\geq 2)$阶矩阵，且 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}$，则必有（　　）.

A．$\boldsymbol{A}$ 的行列式等于 1　　B．$\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵等于 $\boldsymbol{E}$

C．$\boldsymbol{A}$ 的秩等于 n　　D．$\boldsymbol{A}$ 的特征值均为 1

14．已知 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为-1，0，1，则下列矩阵中可逆的是（　　）.

A．$\boldsymbol{A}$　　B．$\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$　　C．$-\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$　　D．$2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$

15．设三阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有特征值 0，1，2，其对应特征向量分别为 ξ_1,ξ_2,ξ_3，令 $\boldsymbol{P}=(\xi_3,\xi_1,2\xi_2)$，则 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=$（　　）.

A．$\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$　　B．$\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$　　C．$\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}$　　D．$\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$

二、填空题

1．设三阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值分别为-2、1、1，且 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 相似，则 $|2\boldsymbol{B}|=$____________.

2．设三阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的三个特征值为 1，2，3，则 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|=$____________.

3．设 3 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=3$，$\lambda_3=0$，则 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=$____________.

4．已知 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 0，-2，3，且矩阵 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 相似，则 $|\boldsymbol{B}+\boldsymbol{E}|=$______.

5．已知 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值分别为 1，2，3，则 $|\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}|=$______________.

6．已知 $\boldsymbol{A}$ 相似于 $\boldsymbol{\varLambda}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$，则 $|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}|=$______________.

7．设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶方阵，其特征值分别为 1，2，3，则 $|\boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{E}|=$____________.

8．若三阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值分别为 1，2，3，则 $|\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}|=$____________.

9．设方阵 $\boldsymbol{A}$ 有一个特征值为 8，则 $\det(-8\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})=$____________.

10．若矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 4\end{pmatrix}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}3 & b\\a & x\end{pmatrix}$ 相似，则 $x=$____________.

11．与矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2\\0 & 3\end{pmatrix}$ 相似的对角矩阵为____________.

12．设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，若 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{4}$，则行列式 $|\boldsymbol{B}^{-1}|=$______.

13．与矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2\\2 & 1\end{pmatrix}$ 相似的对角矩阵是____________.

14．设 $\boldsymbol{A}$ 相似于 $\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & -1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}^4=$____________.

15．已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\2 & 1 & 2\\2 & 2 & 1\end{pmatrix}$ 与对角矩阵 $\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\0 & -1 & 0\\0 & 0 & a\end{pmatrix}$ 相似，则数 $a=$__________.

三、计算题

1．求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 2 & 1\end{pmatrix}$ 的特征值，并判定 $\boldsymbol{A}$ 能否与对角矩阵相似（需说明理由）.

2．设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-4 & -10 & 0\\1 & 3 & 0\\3 & 6 & 1\end{pmatrix}$，求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 及对角矩阵 $\boldsymbol{D}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{D}$.

3．设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & -2 & 0\\-2 & 1 & -2\\0 & -2 & 0\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{P}$ 使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ 为对角矩阵.

4．设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}8 & 7\\1 & 2\end{pmatrix}$，

（1）求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值与对应的全部特征向量.

（2）判定 $\boldsymbol{A}$ 是否可以与对角矩阵相似，若可以，求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 和对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}$.

5．设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&1\\0&1&2\end{pmatrix}$，求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ 为对角矩阵.

6．设矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&0&1\\3&1&3\\4&0&5\end{pmatrix}$，

（1）判定 $\boldsymbol{B}$ 是否可与对角矩阵相似，说明理由；

（2）若 $\boldsymbol{B}$ 可与对角矩阵相似，求对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$ 和可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{BP}=\boldsymbol{\Lambda}$.

7．已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&-2&0\\-2&6&0\\0&0&3\end{pmatrix}$，求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ 为对角阵.

8．设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&a\\0&a&3\end{pmatrix}$的三个特征值分别为 1，2，5，求正的常数 a 的值及可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&5\end{pmatrix}$.

9．设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2\\4&3\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}5&0\\2&-1\end{pmatrix}$，存在 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,1)^{\mathrm{T}}$，使得 $\boldsymbol{A\alpha}_1=5\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{A\alpha}_2=-\boldsymbol{\alpha}_2$；存在 $\boldsymbol{\beta}_1=(3,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_2=(0,1)^{\mathrm{T}}$，使得 $\boldsymbol{B\beta}_1=5\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{B\beta}_2=-\boldsymbol{\beta}_2$．试求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$.

10．设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&3&-1\\x&1&1\end{pmatrix}$与对角矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$相似，求数 x 与可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$.

11．设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&-1\\-1&2\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^n$.

12．设矩阵 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}-1&-4\\1&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&2\end{pmatrix}$，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 由矩阵方程 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{D}$ 确定，试求 $\boldsymbol{A}^5$.

13．已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&a&1\\a&3&1\\1&1&1\end{pmatrix}$与 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&b\end{pmatrix}$相似，求数 a,b 的值.

14．已知矩阵 $\boldsymbol{A}$ 相似于对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$，求行列式 $|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}|$ 的值.

15．已知 2 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=1$ 及 $\lambda_2=-\dfrac{1}{3}$，方阵 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^2$，

（1）求 $\boldsymbol{B}$ 的特征值；（2）求 $\boldsymbol{B}$ 的行列式.

16．已知 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为-1, 1, 2，设 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$，求

（1）矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式及 $\boldsymbol{A}$ 的秩；（2）矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的特征值及与 $\boldsymbol{B}$ 相似的对角矩阵.

参考答案

一、单项选择题

1．C　2．D　3．A　4．D　5．C　6．A　7．D　8．A　9．B
10．D　11．C　12．B　13．C　14．D　15．B

二、填空题

1．-16　2．24　3．2　4．-4　5．24　6．-2　7．0　8．60　9．0

10．2　11．$\begin{pmatrix}1 & \\ & 3\end{pmatrix}$　12．24　13．$\begin{pmatrix}-1 & \\ & 3\end{pmatrix}$　14．$\begin{pmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{pmatrix}$ 或 $\boldsymbol{E}_3$　15．5

三、计算题

1．特征值 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1$，$\boldsymbol{A}$ 只有两个线性无关的特征向量，所以 $\boldsymbol{A}$ 不能与对角矩阵相似.

2．$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 5\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & -2\end{pmatrix}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{D}$.

3．$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}-2 & 2 & 1\\ -1 & -2 & 2\\ 2 & 1 & 2\end{pmatrix}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}1 & & \\ & 4 & \\ & & -2\end{pmatrix}$.

4．(1)特征值 $\lambda_1=1$，对应的全部特征向量为 $k_1(1,-1)^{\mathrm{T}}$，k_1 为非零实数；特征值 $\lambda_2=9$，对应的全部特征向量为 $k_2(7,1)^{\mathrm{T}}$，k_2 为非零实数；

（2）$\boldsymbol{A}$ 存在两个线性无关的特征向量，可以与对角矩阵相似，$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1 & 7\\ -1 & 1\end{pmatrix}$，

$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}1 & \\ & 9\end{pmatrix}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}$.

5. $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&-1&1\end{pmatrix}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&3\end{pmatrix}$.

6.（1）$\boldsymbol{B}$ 存在三个线性无关的特征向量，可以与对角矩阵相似；

（2）$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}0&-1&1\\1&0&3\\0&1&4\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&6\end{pmatrix}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{BP}=\boldsymbol{\Lambda}$.

7. $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}2&0&1\\1&0&-2\\0&1&0\end{pmatrix}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}2&&\\&3&\\&&7\end{pmatrix}$.　　8. a=2，$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&0&1\\1&0&1\end{pmatrix}$.

9. $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}2/3&-1\\1/3&1\end{pmatrix}$.　　10. x=1，$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}-1&1&0\\1&0&1\\1&1&1\end{pmatrix}$.　　11. $\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}3^n+1&-3^n+1\\-3^n+1&3^n+1\end{pmatrix}$.

12. $\begin{pmatrix}43&44\\-11&-12\end{pmatrix}$.　　13. a=1，b=4.　　14. x=0，y=1.

15.（1）$\boldsymbol{B}$ 的特征值为 1，$\dfrac{1}{9}$，（2）$|\boldsymbol{B}|=\dfrac{1}{9}$.

16.（1）$|\boldsymbol{A}|=-2$，$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=3$；（2）$\boldsymbol{B}$ 的特征值为 -2，2，7，$\boldsymbol{B}$ 的相似对角矩阵为 $\begin{pmatrix}-2&&\\&2&\\&&7\end{pmatrix}$.

考点 3　向量内积和正交矩阵

【考点内容】

1．向量的内积与长度

设 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，$\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$ 为两个 n 维行向量，则

（1）$\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的内积：$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=\sum\limits_{i=1}^{n}a_ib_i$，即对应分量的乘积之和.

（2）$\boldsymbol{\alpha}$ 的长度：$\|\boldsymbol{\alpha}\|=\sqrt{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})}=\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2}$，即所有分量平方和的正平方根．特殊地，当 $\|\boldsymbol{\alpha}\|=1$，即 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2=1$ 时，称 $\boldsymbol{\alpha}$ 为单位向量.

对于任取的 $k,l\in\mathrm{R}$，$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}\in\mathrm{R}^n$，有以下基本性质

（1）对称性 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha})$.

（2）线性性 $(k\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=(\boldsymbol{\alpha},k\boldsymbol{\beta})=k(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$，$(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma})+(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})$.

它们可以合并为 $(k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})=k(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma})+l(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})$.

（3）正定性 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})\geq 0$，而且 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})=0\Leftrightarrow\boldsymbol{\alpha}=0$.

任意一个非零向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 都可以单位化：$\tilde{\boldsymbol{\alpha}}=\dfrac{1}{\|\boldsymbol{\alpha}\|}\cdot\boldsymbol{\alpha}$.

2．两向量正交

定义 5.3.3 设 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，$\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$ 为两个 n 维行向量，如果其内积 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=0$，即 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_ib_i=0$，则称 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 正交，记为 $\boldsymbol{\alpha}\perp\boldsymbol{\beta}$.

由定义可知，零向量与任意同维的向量都正交；反之，若某个向量与同维的任意一个向量都正交，则其必是零向量.

定义 5.3.4 如果一个同维向量组中不含有零向量，且其中任意两个向量都是正交的（简称为两两正交），则称这个向量组为正交向量组．每个向量都是单位向量的正交向量组称为标准正交向量组，或两两正交的单位向量组．n 维标准单位向量组就是标准正交向量组.

定理 5.3.1 正交向量组一定是线性无关组.

3．正交矩阵

定义 5.3.6 如果 n 阶实方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}_n$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵.

正交矩阵的基本性质

设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶正交矩阵，则有以下结论：

（1）$|\boldsymbol{A}|=\pm 1$.

（2）$\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

（3）正交矩阵的转置矩阵和逆矩阵也是正交矩阵.

（4）正交矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 必是正交矩阵.

（5）对于任意的 n 维列向量 $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$，都有内积等式 $(\boldsymbol{A\alpha},\boldsymbol{A\beta})=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$.

事实上，注意到 $\boldsymbol{A\alpha}$ 是列向量，必有内积等式

$$(\boldsymbol{A\alpha},\boldsymbol{A\beta})=(\boldsymbol{A\alpha})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A\beta})=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A\beta}=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$$

因此 $\|\boldsymbol{A\alpha}\|=\|\boldsymbol{\alpha}\|$，以及 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=0\Leftrightarrow(\boldsymbol{A\alpha},\boldsymbol{A\beta})=0$

定义 5.3.7 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶正交矩阵，$\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$ 是两个 n 维列向量，则称线性变换 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{Ax}$ 为正交变换.

当 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶正交矩阵时，内积等式 $(\boldsymbol{A\alpha},\boldsymbol{A\beta})=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$ 说明，正交变换一定不改变任何两个向量的内积，因此，也不改变向量的长度，而且还保持两个向量之间的正交性不变．因此，正交变换一定把标准正交向量组变成标准正交向量组.

定理 5.3.2 两个同阶的正交矩阵的乘积一定是正交矩阵.

定理 5.3.3 n 阶实方阵 $\boldsymbol{A}$ 是正交矩阵 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{A}$ 的 n 个行向量是标准正交向量组 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{A}$ 的 n 个列向量是标准正交向量组.

定理 5.3.4 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶正交矩阵，λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的任意一个特征值，则 $\lambda \neq 0$ 且 λ^{-1} 也是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，同时也是 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的特征值.

【典型例题】

【例 5-20】设向量 $\boldsymbol{\alpha}$=(4,-1,2,-2)，则下列向量是单位向量的是（　　）.

A. $\frac{1}{3}\boldsymbol{\alpha}$　　B. $\frac{1}{5}\boldsymbol{\alpha}$　　C. $\frac{1}{9}\boldsymbol{\alpha}$　　D. $\frac{1}{25}\boldsymbol{\alpha}$

解：选 B. 因为 $\|\boldsymbol{\alpha}\|=\sqrt{16+1+4+4}=5$，所以根据单位化公式可得 $\tilde{\boldsymbol{\alpha}}=\frac{1}{5}\boldsymbol{\alpha}$.

【例 5-21】若 $\boldsymbol{\alpha}=(1,1,t)$ 与 $\boldsymbol{\beta}=(1,1,1)$ 正交，则 t=（　　）.

A. -2　　B. -1　　C. 0　　D. 1

解：选 A. 由正交定义可知，$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=1+1+t=0$，得 $t=-2$.

【例 5-22】设 $\boldsymbol{P}$ 为正交矩阵，向量 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 的内积为 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=2$，则 $(\boldsymbol{P\alpha},\boldsymbol{P\beta})$ =（　　）.

A. $\frac{1}{2}$　　B. 1　　C. $\frac{3}{2}$　　D. 2

解：选 D. 根据正交变换一定不改变任何两个向量的内积可知，$(\boldsymbol{P\alpha},\boldsymbol{P\beta})=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=2$.

【例 5-23】设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶正交矩阵，$\boldsymbol{X}=(1,2,2)^{\mathrm{T}}$，则 $\|\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{X}\|$=____________.

解：答案为 3. 因为 $\boldsymbol{A}$ 是正交矩阵，所以 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 也是正交矩阵，$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{X}$ 同样是正交变换，从而有 $\|\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{X}\|=\|\boldsymbol{X}\|=3$.

【例 5-24】已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 是正交矩阵，则 $a+b$=______________.

解：答案为 0. 因为 $\boldsymbol{A}$ 是正交矩阵，所以 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组两两正交，则有 $\frac{1}{\sqrt{2}}a+\frac{1}{\sqrt{2}}b=\frac{1}{\sqrt{2}}(a+b)=0 \Rightarrow a+b=0$.

【例 5-25】设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,-1,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,0,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,-1,2,0)^{\mathrm{T}}$.求一个非零向量 $\boldsymbol{\alpha}_4$，使得 $\boldsymbol{\alpha}_4$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 均正交.

解：设 $\boldsymbol{\alpha}_4=(x_1,x_2,x_3,x_4)^{\mathrm{T}}$，因为 $\boldsymbol{\alpha}_4$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 均正交，代入得齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1-x_2-x_3+x_4=0 \\ x_1+x_2=0 \\ x_1-x_2+2x_3=0 \end{cases},$$

解得该方程组的一个基础解系为 $(-1,\ 1,\ 1,\ 3)^{\mathrm{T}}$，从而取 $\boldsymbol{\alpha}_4=(-1,\ 1,\ 1,\ 3)^{\mathrm{T}}$，即为所求

的向量，满足题目要求.

注意 该题答案不唯一，所求向量可以是 $(-1,\ 1,\ 1,\ 3)^{\mathrm{T}}$ 的任意非零常数倍.

【同步练习及参考答案】

一、单项选择题

1．若向量 $\boldsymbol{\alpha}=\left(\frac{1}{3}k,\quad k-1,\quad k\right)$ 与向量 $(1,\ 1,\ 0)$ 正交，则（　　）.

A．-1　　B．0　　C．$\frac{3}{4}$　　D．$\frac{4}{3}$

2．下列向量中与 $\boldsymbol{\alpha}=(1,1,-1)$ 正交的向量是（　　）.

A．$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1)$　　B．$\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,1,1)$　　C．$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,-1,1)$　　D．$\boldsymbol{\alpha}_4=(0,1,1)$

3．设 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵，则以下结论不正确的是（　　）.

A．$\boldsymbol{A}$ 的行列式一定等于 1　　B．$\boldsymbol{A}^{-1}$ 是正交矩阵

C．$\boldsymbol{A}$ 的列向量组为正交单位向量组　　D．$\boldsymbol{A}$ 的行向量组为正交单位向量组

4．下列矩阵是正交矩阵的是（　　）.

A．$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$　　B．$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$

C．$\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\-\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}$　　D．$\begin{pmatrix}\sqrt{2}/2&1/6&\sqrt{3}/3\\0&\sqrt{6}/6&-\sqrt{3}/3\\\sqrt{2}/2&\sqrt{10}/6&-\sqrt{3}/3\end{pmatrix}$

5．若向量 $\boldsymbol{\alpha}=(1,\ -2,\ 1)$ 与 $\boldsymbol{\beta}=(2,\ 3,\ t)$ 正交，则 $t=$（　　）.

A．-2　　B．0　　C．2　　D．4

6．设向量 $\boldsymbol{\alpha}=(1,-2,3)$ 与 $\boldsymbol{\beta}=(2,k,6)$ 正交，则数 k 为（　　）.

A．-10　　B．-4　　C．3　　D．10

7．若 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵，则下列矩阵中不是正交矩阵的是（　　）.

A．$\boldsymbol{A}^{-1}$　　B．$2\boldsymbol{A}$　　C．$\boldsymbol{A}^2$　　D．$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$

8．设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶正交矩阵，则行列式 $|\boldsymbol{A}^2|=$（　　）.

A．-2　　B．-1　　C．1　　D．2

二、填空题

1．设向量 $\boldsymbol{\alpha}=(1,2,3)$，$\boldsymbol{\beta}=(3,2,1)$，则向量 $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$ 的内积 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=$____________.

2．已知 3 维向量$\boldsymbol{\alpha}=(1,3,-1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}=(-1,2,4)^{\mathrm{T}}$，则内积$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=$____________.

3．设向量$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,-1)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(3,2,1)$，则内积$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)=$____________.

4．设向量$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-2,2)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,0,-1)^{\mathrm{T}}$，则内积$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)=$____________.

5．已知向量$\boldsymbol{\alpha}=(2,1,0,3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}=(1,-2,1,k)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}$与$\boldsymbol{\beta}$的内积为 2，则数$k=$__________.

6．设$\boldsymbol{\alpha}$与$\boldsymbol{\beta}$内积$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=2$，$\|\boldsymbol{\beta}\|=2$，则内积$(2\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},-\boldsymbol{\beta})=$___________.

7．已知$\boldsymbol{P}$是 3 阶正交矩阵，向量$\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$，则内积$(\boldsymbol{P\alpha},\boldsymbol{P\beta})=$__________.

8．设向量$\boldsymbol{\alpha}=(1,1,1)$，则它的单位化向量为____________.

9．设向量$\boldsymbol{\alpha}=\left(b,\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\mathrm{T}}$为单位向量，则数$b=$_____________.

10．设向量$\boldsymbol{\alpha}=\left(2,-1,\dfrac{1}{2},1\right)$，则$\boldsymbol{\alpha}$的长度为__________.

11．设$\boldsymbol{\alpha}=(-1,2,2)$，则与$\boldsymbol{\alpha}$反方向的单位向量是________________.

12．设向量$\boldsymbol{\alpha}=(1,2,3,4)$，则$\boldsymbol{\alpha}$的单位化向量为____________.

13．设$\boldsymbol{P}$为n阶正交矩阵，$\boldsymbol{x}$是n维单位长的列向量，则$\|\boldsymbol{Px}\|=$______________.

14．设向量$\boldsymbol{\alpha}=(3,-4)^{\mathrm{T}}$，则$\boldsymbol{\alpha}$的长度$\|\boldsymbol{\alpha}\|=$__________.

15．设向量$\boldsymbol{\alpha}=(1,3,3)$，则$\boldsymbol{\alpha}$的长度$\|\boldsymbol{\alpha}\|=$___________.

16．向量$\boldsymbol{\alpha}=(3,2,t,1)$，$\boldsymbol{\beta}=(t,-1,2,1)$正交，则$t=$_____________.

17．已知向量$\boldsymbol{\alpha}=(3,k,2)^{\mathrm{T}}$与$\boldsymbol{\beta}=(1,1,k)^{\mathrm{T}}$正交，则数$k=$_____________.

18．设向量$\boldsymbol{\alpha}=(1,2,-2)$，$\boldsymbol{\beta}=(2,a,3)$，且$\boldsymbol{\alpha}$与$\boldsymbol{\beta}$正交，则$a=$____________.

19．已知向量$\boldsymbol{\alpha}=(1,2,-1)$与向量$\boldsymbol{\beta}=(0,1,y)$正交，则$y=$_________.

20．设向量$\boldsymbol{\alpha}_1=(-1,1,-3)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,-1,\lambda)$正交，则$\lambda=$______________.

21．设$\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}1\\2\\t\end{pmatrix}$，且$\boldsymbol{\alpha}$与$\boldsymbol{\beta}$正交，则$t=$____________.

22．若$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\\0&1&0\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0&x\end{pmatrix}$是正交矩阵，则$x=$____________.

23．与向量$(1,0,1)^{\mathrm{T}}$和$(1,1,0)^{\mathrm{T}}$均正交的一个单位向量为_____________.

24．与向量$(3,-4)$正交的一个单位向量为________.

三、计算题

1．已知向量$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$，求向量$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$，使$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$两两正交.

2．已知$1,1,-1$是三阶实对称矩阵$\boldsymbol{A}$的三个特征值，向量$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$、$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,2,1)^{\mathrm{T}}$是$\boldsymbol{A}$的对应于$\lambda_1=\lambda_2=1$的特征向量，求$\boldsymbol{A}$的属于$\lambda_3=-1$的特征向量.

四、证明题

1．设$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$均为$n$阶正交矩阵，证明$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$.

参考答案

一、单项选择题

1．C　2．D　3．A　4．A　5．D　6．D　7．B　8.C

二、填空题

1．10　2．1　3．6　4．0　5．$\frac{2}{3}$　6．-8　7．5　8．$\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

9．0　10 $\frac{5}{2}$　11．$\left(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right)$　12．$\frac{\sqrt{30}}{3}(1,2,3,4)$　13．1　14．5

15．$\sqrt{19}$　16．$\frac{1}{5}$　17．-1　18．2　19．2　20．-1　21．-1

22．$-\frac{1}{\sqrt{2}}$　23．$\frac{\sqrt{3}}{3}(1,-1,-1)$　24．$\left(\frac{4}{5},\frac{3}{5}\right)$

三、计算题

1．$\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,1,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(-1,0,1)^{\mathrm{T}}$.　2．属于$\lambda_3=-1$的一个特征向量$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,-1,0)^{\mathrm{T}}$.

四、证明题

27．证明：由于$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$均为正交矩阵，所以

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{-1},\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{-1},\left(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\right)^{\mathrm{T}}=\left(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\right)^{-1},$$

因此$\left(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\right)^{-1}=\left(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\right)^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$.

考点 4　实对称矩阵的相似标准形

【考点内容】

1．实对称矩阵的相关结论

定理 5.4.1　实对称矩阵的特征值一定是实数，其特征向量一定是实向量.

定理 5.4.2　实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的属于不同特征值的特征向量一定是正交向量.

定理 5.4.3　(对称矩阵基本定理) 对于任意一个 n 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$，一定存在 n 阶正交矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{P}^{T}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}=\boldsymbol{\Lambda}.$$

对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$ 中的 n 个对角元 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 就是 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值. 反之, 凡是正交相似于对角矩阵的实方阵一定是对称矩阵.

定理 5.4.3 中所得到的对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$ 称为对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的正交相似标准形. 说明, n 阶实方阵 $\boldsymbol{A}$ 正交相似于对角矩阵当且仅当 $\boldsymbol{A}$ 是对称矩阵.

定理 5.4.4　两个有相同特征值的同阶对称矩阵一定是正交相似矩阵. 对称矩阵正交相似于对角矩阵

以 3 阶对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为例，求正交矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}$（或求 $\boldsymbol{A}$ 正交相似标准形，或问 $\boldsymbol{A}$ 是否能正交相似于对角矩阵），解题思路：

（1）根据考点 1，先求出对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 λ_1，λ_2，λ_3，与彼此正交的特征向量 $\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3$（当碰到重的特征值时，可用直观法，直接求出彼此正交的特征向量.

（2）将所求得的彼此正交的特征向量 $\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3$ 再单位化，得向量 $\overline{\boldsymbol{p}}_1,\overline{\boldsymbol{p}}_2,\overline{\boldsymbol{p}}_3$，即可直接构造矩阵 $\boldsymbol{P}=(\overline{\boldsymbol{p}}_1,\overline{\boldsymbol{p}}_2,\overline{\boldsymbol{p}}_3)$，则 $\boldsymbol{P}$ 就为正交矩阵；且有

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3).$$

【典型例题】

【例 5-26】设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶实对称矩阵，$\boldsymbol{\alpha}_1=(0,\ 1,\ 1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,\ 2,\ x)^{\mathrm{T}}$ 分别为 $\boldsymbol{A}$ 的对应于不同特征值的特征向量，则数 $x=$_________.

解：答案为 -2．根据定理 5.4.2 可知，向量 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 正交，则 $2+x=0$，得 $x=-2$．

【例 5-27】已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$，求正交矩阵 $\boldsymbol{P}$ 和对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}$.

解：由 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -1 & -1\\ -1 & \lambda-1 & -1\\ -1 & -1 & \lambda-1\end{vmatrix}=\lambda^2(\lambda-3)=0$，得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_1=\lambda_2=0,\lambda_3=3$.

对于 $\lambda_1=\lambda_2=0$，考虑齐次线性方程组 $-\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=0$，对应同解的方程组为 $x_1+x_2+x_3=0$，x_2,x_3 为自由未知量．通过直观法，求得的彼此正交的两个特征向量为 $\boldsymbol{p}_1=(-1,1,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{p}_2=(1,1,-2)^{\mathrm{T}}$；

对于 $\lambda_3=3$，考虑齐次线性方程组 $(3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=0$，对应同解的方程组为 $\begin{cases}x_1-x_3=0\\ x_2-x_3=0\end{cases}$，$x_3$ 为自由未知量．令 $x_3=1$，得特征向量 $\boldsymbol{p}_3=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$；

将特征向量 $\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3$ 单位化得，

$$\bar{\boldsymbol{p}}_1=(-1/\sqrt{2},1/\sqrt{2},0)^{\mathrm{T}},\ \bar{\boldsymbol{p}}_2=(1/\sqrt{6},1/\sqrt{6},-2/\sqrt{6})^{\mathrm{T}},\ \bar{\boldsymbol{p}}_3=(1/\sqrt{3},1/\sqrt{3},1/\sqrt{3})^{\mathrm{T}}.$$

令 $\boldsymbol{P}=(\bar{\boldsymbol{p}}_1,\bar{\boldsymbol{p}}_2,\bar{\boldsymbol{p}}_3)=\begin{pmatrix}-1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3}\\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3}\\ 0 & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3}\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&3\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{P}$ 为正交矩阵，且有 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$.

【同步练习及参考答案】

一、填空题

1．设 1 为 3 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 2 重特征值，则 $\boldsymbol{A}$ 的属于 1 的线性无关的特征向量个数是__________.

2．设 2 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 1，2，它们对应的特征向量分别为 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,\ 1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,\ k)^{\mathrm{T}}$，则数 k=______________.

3．设 2 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值分别为-1 和 1，则 $\boldsymbol{A}^2$= _________.

4．实对称矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$的正交相似标准形矩阵是_____________.

二、计算题

1．设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$，求正交矩阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 为对角矩阵.

2．已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&1\\0&1&a\end{pmatrix}$ 的一个特征值为 1，求数 a，并求正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 和对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$，使得 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{AQ}=\boldsymbol{\Lambda}$.

参考答案

一、填空题

1．2　2．-1　3．$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ 或 $\boldsymbol{E}_2$　4．$\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}$

二、计算题

1．正交矩阵 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\sqrt{2}/2&\sqrt{2}/2\\\sqrt{2}/2&-\sqrt{2}/2\end{pmatrix}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}3&\\&-1\end{pmatrix}$.

2．$a=2$，正交矩阵 $\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}0&1&0\\\sqrt{2}/2&0&\sqrt{2}/2\\-\sqrt{2}/2&0&\sqrt{2}/2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}1&&\\&2&\\&&3\end{pmatrix}$，使得 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{AQ}=\boldsymbol{\Lambda}$.

第 6 章　实 二 次 型

【考核要求】

学习本章，要求理解实二次型的定义及其矩阵表示；了解实二次型的标准形；了解合同矩阵的概念；会用正交变换化二次型为标准形；了解用配方法化二次型为合同标准形；了解惯性定理；理解正定二次型和正定矩阵的定义．掌握正定二次型和正定矩阵的判别方法．

本章重点：化二次型为标准形以及正定二次型和正定矩阵的判别方法．

难点：用正交变换化二次型为标准形．

考点 1　实二次型及其标准形

【考点内容】

1．实二次型及其对称矩阵

n 元实二次型指的是含有 n 个未知量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的实系数二次齐次多项式：

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$$

其中，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ 为 n 阶实对称矩阵．

由定义可知，n 元实二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 与 n 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是互相唯一确定的，称 $\boldsymbol{A}$ 是二次型 f 的矩阵，称 f 是以 $\boldsymbol{A}$ 为矩阵的二次型．

2．化二次型为标准形

（1）二次型的标准形定义

只有平方项 x_i^2 而没有交叉项 $x_i x_j$，$i \neq j$ 的二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = d_1x_1^2 + d_2x_2^2 + \cdots + d_nx_n^2$，称为二次型的标准形．其对应的矩阵为对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda} = \mathrm{diag}(d_1, d_2, \cdots, d_n)$

$$= \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix}.$$

（2）正交变换法化二次型为标准形

设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶正交矩阵，$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ 是两个 n 维列向量，则称线性变换 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 为正交变换.

定理 6.1.1 对于任意一个 n 元二次型 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$，一定存在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$，$\boldsymbol{P}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}_n$，使得

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{y}=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2,$$

其中，$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 就是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值．把这种标准形称为二次型 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的相似标准形.

正交变换法化二次型为标准形的解题思路（以 3 阶方阵为例）：

① 先写出二次型对应的对称矩阵 $\boldsymbol{A}$；

② 根据第五章考点 4，先求出对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的三个特征值 λ_1，λ_2，λ_3，与彼此对应的正交特征向量 $\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3$（在求重的特征值的特征向量时用直观法即可得）；

③ 将所求得的彼此正交的特征向量 $\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3$ 单位化，化后得向量 $\overline{\boldsymbol{p}}_1,\overline{\boldsymbol{p}}_2,\overline{\boldsymbol{p}}_3$，即可直接构造矩阵 $\boldsymbol{P}=(\overline{\boldsymbol{p}}_1,\overline{\boldsymbol{p}}_2,\overline{\boldsymbol{p}}_3)$，则 $\boldsymbol{P}$ 就为正交矩阵；

④ 写出结果：经正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ 后，可将原二次型化为标准形：$\lambda_1y_1^2-\lambda_2y_2^2-\lambda_3y_3^2$.

（3）配方法化二次型为标准形

用完全平方和、平方差公式

$$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2,\ a^2-2ab+b^2=(a-b)^2.$$

若所给的二次型没有平方项，只有交叉项，应先做一次变换，让其出现平方项后，再进行配方.

3．二次型的规范形及其正负惯性指数

所有平方项的系数均为 1，-1 或 0 的标准二次型称为规范二次型，所以规范形是标准形的一种特殊情况.

定理 6.1.2（惯性定理） 任意一个 n 元二次型 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$，一定可以经过可逆线性变换化为规范形

$$f=z_1^2+\cdots+z_k^2-z_{k+1}^2-\cdots-z_r^2,$$

其中 k 和 r 是由 $\boldsymbol{A}$ 唯一确定的(与所采用的变换的选择无关)．k 是规范形中系数为 1 的项数，r 就是 $\boldsymbol{A}$ 的秩.

规范形中的 k 称为二次型 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$（或对称矩阵 $\boldsymbol{A}$）的正惯性指数，称 $r-k$ 为二次型 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的负惯性指数，称 $k-(r-k)=2k-r$ 为它们的符号差.

注意：由定义可知，正惯性指数等于标准形中（包括规范形）系数为正的平方项项数，也等于对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的正特征值的个数，负惯性指数等于标准形中（包括规范形）系数为负的平方项项数，也等于对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的负特征值的个数，正惯性指数与负惯性指数的差即为符号差.

【典型例题】

【例 6-1】三元二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2+4x_1x_2+6x_1x_3+4x_2^2+12x_2x_3+9x_3^2$ 的矩阵为（　　）.

A. $\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&6&9\end{pmatrix}$　　B. $\begin{pmatrix}1&4&3\\0&4&6\\3&6&9\end{pmatrix}$　　C. $\begin{pmatrix}1&2&6\\2&4&6\\0&6&9\end{pmatrix}$　　D. $\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&0\\3&12&9\end{pmatrix}$

解：答案为 A．对角元依次对应平方项系数．其他位置元素对应相应的交叉项前系数的一半.

【例 6-2】二次型 $f(x_1, x_2) = 5x_1^2+3x_2^2$ 的规范形是（　　）.

A. $y_1^2-y_2^2$　　B. $-y_1^2-y_2^2$　　C. $-y_1^2+y_2^2$　　D. $y_1^2+y_2^2$

解：答案为 D．根据规范型定义，标准形前系数都为正的，故将平方项的系数换为 1 即为规范型.

【例 6-3】二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=4x_2^2-3x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3+8x_2x_3$ 的秩为____________.

解：二次型的矩阵为 $\begin{pmatrix}0&2&-2\\2&4&4\\-2&4&-3\end{pmatrix}$ 其秩为 3，故二次型的秩为 3.

【例 6-4】设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2-2x_3^2+2x_1x_2$ 的正惯性指数为 p，负惯性指数为 q，则 p-q=_______.

解：二次型的标准形为 $f(x_1,x_2,x_3)=y_1^2-2y_2^2$，则 p =0，q =0，则 $p-q$ =0.

【例 6-5】用配方法求二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_2^2+x_3^2-2x_1x_3+4x_2x_3$ 的标准形，并写出相应的线性变换.

解：用配方法把该二次型改写成 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_2^2+x_3^2-2x_1x_3+4x_2x_3$

$=(x_1-x_3)^2+4\left(x_2+\frac{1}{2}x_3\right)^2-x_3^2$，令 $\begin{cases}y_1=x_1-x_3\\ y_2=x_2+\frac{1}{2}x_3\\ y_3=x_3\end{cases}$，即 $\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&1/2\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$，从而

通过可逆线性变换

$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&1/2\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&-1/2\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$，可得该二次型的标准形为 $f=y_1^2+4y_2^2-y_3^2$.

【例 6-6】用正交变换化二次型 $f(x_1,x_2)=5x_1^2+5x_2^2+4x_1x_2$ 为标准型，并写出所作的

正交变换.

解：二次型的矩阵 $A=\begin{pmatrix}5&2\\2&5\end{pmatrix}$. 由于 $|\lambda E-A|=(\lambda-3)(\lambda-7)$，所以 A 的特征值 $\lambda_1=3,\lambda_2=7$.

对于特征值 $\lambda_1=3$，由方程组 $(3E-A)x=0$ 得到 A 属于特征值 $\lambda_1=3$ 的一个单位特征向量 $\alpha_1=\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$；

对于特征值 $\lambda_2=7$, 由方程组 $(7E-A)x=0$ 得到 A 属于特征值 $\lambda_2=7$ 的一个单位特征向量 $\alpha_2=\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$；

得正交矩阵 $Q=(\alpha_1,\alpha_2)=\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}$，作正交变换 $x=Qy$,

二次型化为标准形 $f=3y_1^2+7y_2^2$.

【同步练习及参考答案】

一、单项选择题

1. 二次型 $f(x,y)=x^2-6xy+y^2$ 对应的对称矩阵为（　　）.

A. $\begin{pmatrix}1&-6\\-6&1\end{pmatrix}$　　B. $\begin{pmatrix}1&-3\\-3&1\end{pmatrix}$　　C. $\begin{pmatrix}1&0\\-6&1\end{pmatrix}$　　D. $\begin{pmatrix}1&-6\\0&1\end{pmatrix}$

2. 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+x_3^2-2x_1x_2+4x_1x_3-2x_2x_3$ 的矩阵是（　　）.

A. $\begin{pmatrix}1&-2&4\\-2&2&-2\\4&-2&1\end{pmatrix}$　　B. $\begin{pmatrix}1&-2&4\\0&2&-2\\0&0&1\end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix}1&-1&2\\-1&2&-1\\2&-1&1\end{pmatrix}$　　D. $\begin{pmatrix}1&2&-1\\2&2&-1\\-1&-1&1\end{pmatrix}$

3. 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2-x_1x_2+x_2^2$ 的矩阵为（　　）.

A. $\begin{pmatrix}2&-1\\-1&1\end{pmatrix}$　　B. $\begin{pmatrix}2&-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&1\end{pmatrix}$　　C. $\begin{pmatrix}2&-\frac{1}{2}&0\\-\frac{1}{2}&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$　　D. $\begin{pmatrix}2&-1&0\\-1&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

4. 二次型 $f(x,y,z)=x^2-y^2$ 的正惯性指数 p 为（　　）.

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

5. 二次型 $f(x_1, x_2, x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+4x_1x_2$ 的正惯性指数为（　　）.

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

6. 若 3 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$是正定矩阵，则 $\boldsymbol{A}$ 的正惯性指数为（　　）.

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

7. 4 元二次型 $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_1x_4$ 的秩为（　　）.

A. 4　　B. 3　　C. 2　　D. 1

8. 二次型 $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+2x_3x_4$ 的秩为（　　）.

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

9. 4 元二次型 $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=2x_1x_2+2x_1x_4+2x_2x_3+2x_3x_4$ 的秩为（　　）.

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

10. 二次型 $f(x_1, x_2, x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$ 的规范形为（　　）.

A. $z_1^2-z_2^2$　　B. $z_1^2+z_2^2$　　C. z_1^2　　D. $z_1^2+z_2^2+z_3^2$

11. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$，则二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}$ 的规范形为（　　）.

A. $z_1^2+z_2^2+z_3^2$　　B. $-z_1^2-z_2^2-z_3^2$　　C. $z_1^2-z_2^2-z_3^2$　　D. $z_1^2+z_2^2-z_3^2$

12. 设实对称矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-4&2\\0&2&-1\end{pmatrix}$，则 3 元二次型 $f(x_1, x_2, x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}$ 的规范形为（　　）.

A. $z_1^2+z_2^2+z_3^2$　　B. $z_1^2+z_2^2-z_3^2$　　C. $z_1^2+z_2^2$　　D. $z_1^2-z_2^2$

二、填空题

1. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&-2\\0&-2&0\end{pmatrix}$，则二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}=$____________________.

2. 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&-1\\1&-1&2\end{pmatrix}$，则对应的二次型 $f(x_1, x_2, x_3)=$__________.

3. 矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&4\\2&2&-1\\4&-1&3\end{pmatrix}$对应的二次型 $f=$__________.

4．矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 3\end{pmatrix}$所对应的二次型是____________.

5．二次型$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+3x_2^2+5x_3^2+2x_1x_2-2x_1x_3+8x_2x_3$的矩阵是________.

6．二次型$f(x_1,x_2,x_3)=-4x_1x_2+2x_1x_3+6x_2x_3$的矩阵是_________________.

7．二次型$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1-x_2)^2+(x_2-x_3)^2$的矩阵是_______________.

8．二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2-x_1x_3+x_2x_3$的矩阵是________________.

9．二次型$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4+5x_4^2$所对应的对称矩阵是_____________.

10．二次型$f(x_1,x_2)=2x_1^2+2x_1x_2-x_2^2$的秩为_______________.

11．二次型$f(x_1,x_2,x_3)=4x_2^2-3x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3+8x_2x_3$的秩为_____________.

12．设3元实二次型$f(x_1,x_2,x_3)$的秩为3，正惯性指数为2，则此二次型的规范形是_____________.

13．设矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$，则二次型$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}$的规范形为____________.

14．设实二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}x$，已知$\boldsymbol{A}$的特征值为-1，1，2，则该二次型的规范形为____________.

15．二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-2x_2^2-2x_3^2+4x_2x_3$经正交变换可化为标准形_______________.

16．二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_1x_2+x_2^2+x_3^2$的正惯性指数为__________.

17．二次型$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1^2+3x_2^2+2x_3^2-x_4^2$的正惯性指数为___________.

18．二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+5x_2^2+6x_3^2+4x_1x_2-2x_1x_3-2x_2x_3$的正惯性指数是________.

三、计算题

1．确定a，b的值，使二次型$f(x_1,x_2,x_3)=ax_1^2+2x_2^2-2x_3^2+2bx_1x_3$的矩阵$\boldsymbol{A}$的特征值之和为1，特征值之积为$-12$.

2．设实二次型$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_2^2+3x_3^2+2tx_1x_2+2x_1x_3$，求$t$应满足的条件使得$f(x_1,x_2,x_3)$为正定二次型.

3．用配方法化二次型$f(x_1,x_2,\ x_3)=x_1^2-2x_2^2-2x_3^2-4x_1x_2+12x_2x_3$为标准形，并写出所作的可逆线性变换.

4．用配方法化二次型$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2-2x_2^2-4x_1x_3+8x_2x_3$为标准形，并写出所作的可逆性变换.

5．用配方法化二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+3x_2^2-2x_3^2+4x_1x_2+2x_2x_3$为标准形，并写出所作的可逆线性变换.

6. 求二次型$f(x_1,\ x_2,\ x_3)=x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1$的矩阵, 并用配方法求二次型的标准型.

7．求二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = -4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$ 经可逆线性变换 $\begin{cases} x_1 = 2y_1 + 2y_2 + y_3 \\ x_2 = 2y_1 - 2y_2 + y_3 \\ x_3 = \qquad\qquad 2y_3 \end{cases}$ 所得的标准形.

8．用正交变换将二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_3$ 化为标准形，并写出标准形和所作的正交变换.

9．求正交变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$，将二次型 $f(x_1, x_2) = 3x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_2^2$ 化为标准形，并指出 f 是否为正定二次型.

10．求正交变换 $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{Y}$，化二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = -2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$ 为标准形.

11．求正交变换 $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{X}$，化二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2 + 2_1x_3 - 2x_2x_3$ 为标准形.

12．已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$，求一正交变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$，将此二次型化为标准形.

13．设 3 元二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_3$，求正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$，将二次型化为标准形.

参考答案

一、单项选择题

1．B　2．C　3．C　4．B　5．C　6．D　7．C　8．C　9．B　10．C　11．D　12．D

二、填空题

1．$x^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}x = x_1^2 + 2x_2^2 - 4x_2x_3$　2．$f(x_1, x_2, x_3) = x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$

3．$f = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 8x_1x_3 - 2x_2x_3$　4．$f = x_1^2 - x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3$

5．$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \\ -1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$　6．$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$　7．$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$　8．$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$

9．$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 5 \end{pmatrix}$　10．2　11．$f = y_1^2 + y_2^2 - y_3^3$　12．$f = z_1^2 - z_2^2$

13．$f=z_1+z_2-z_3$　14．$f=y_1^2-4y_2^2$　15．2　16．2　17．3　18．3

三、计算题

1．$a=1$，$b=\pm 2$　2．$t\in\left(-\frac{\sqrt{15}}{3},\frac{\sqrt{15}}{3}\right)$

3．可逆线性变换为$\begin{cases}x_1=y_1+2y_2-2y_3\\x_2=y_2-y_3\\x_3=y_3\end{cases}$，标准形为$f=y_1^2-6y_2^2+4y_3^2$

4．可逆线性变换为$\begin{cases}x_1=y_1+y_3\\x_2=y_2+2y_3\\x_3=y_3\end{cases}$，标准形为$2y_1^2-2y_2^2+6y_3^2$

5．可逆线性变换为$\begin{cases}x_1=y_1-2y_2-2y_3\\x_2=y_2+y_3\\x_3=y_3\end{cases}$，标准形为$y_1^2-y_2^2-y_3^2$

6．标准形为$f=z_1^2-z_2^2-z_3^2$

7．$f=-16y_1^2+16y_2^2+4y_3^2$

8．$\boldsymbol{p}=\begin{pmatrix}0&\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}\\1&0&0\\0&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$正交变换$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{PY}$得标准形$2y_1^2+2y_2^2$．

9．$f=2y_1^2+4y_2^2$　二次型正定

10．$\boldsymbol{p}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\-\frac{1}{\sqrt{3}}&0&\frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$正交变换$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{PY}$，标准形：$f=-2y_1^2+y_2^2+y_3^2$．

11．令$\boldsymbol{p}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}&-\frac{1}{\sqrt{3}}\\0&\frac{2}{\sqrt{6}}&-\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$，取$\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{PX}$，则有$f=y_1+y_2-2y_3$．

12．令 $p=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$经正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Py}$，将该二次型化为标准形：$2y_1^2-y_2^2-y_3^2$.

13．令 $p=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$经正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Py}$，将该二次型化为标准形 $y_2^2+3y_3^2$.

考点 2　正定二次型和正定矩阵

【考点内容】

1．二次型及其对称矩阵的分类

对 n 元二次型 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}$ 和对应的对称矩阵 $\boldsymbol{A}$，可分为以下五类：

（1）如果对于任何非零实列向量 $\boldsymbol{x}$，都有 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}>0$，则称 f 为正定二次型，称 $\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵.

（2）如果对于任何非零实列向量 $\boldsymbol{x}$，都有 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}\geq 0$，则称 f 为半正定二次型，称 $\boldsymbol{A}$ 为半正定矩阵.

（3）如果对于任何非零实列向量 $\boldsymbol{x}$，都有 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}<0$，则称 f 为负定二次型，称 $\boldsymbol{A}$ 为负定矩阵.

（4）如果对于任何非零实列向量 $\boldsymbol{x}$，都有 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}\leq 0$，则称 f 为半负定二次型，称 $\boldsymbol{A}$ 为半负定矩阵.

（5）其他的实二次型称为不定二次型，其他的对称矩阵称为不定矩阵.

2．正定二次型和正定矩阵的判定

定理 6.2.1　实对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$ 为正定矩阵 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{\Lambda}$ 中的所有对角元全大于零.

定理 6.2.2　设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 是正定矩阵，则 $\boldsymbol{A}$ 中所有对角元 $a_{ii}>0$，$i=1,2,\cdots,n$.

由该命题的逆否命题可知，若发现某对称矩阵的对角元存在负数，则该矩阵一定不是正定矩阵.

定理 6.2.3 n 阶对称矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 是正定矩阵 $\Leftrightarrow \boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值全大于零.

$\Leftrightarrow \boldsymbol{A}$ 的正惯性指数为 n.

$\Leftrightarrow \boldsymbol{A}$ 合同于单位矩阵.

定义 6.2.1 对 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$，由位于 $\boldsymbol{A}$ 中前 k 行和前 k 列的 k^2 个元素，按照原来的相对顺序排成的 k 阶行列式，$D_k=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}$，$1\le k\le n$，称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 k 阶顺序主子式.

定理 6.2.6 n 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 是正定矩阵 $\Leftrightarrow \boldsymbol{A}$ 的 n 个顺序主子式 $D_k>0$，$k=1,2,\cdots,n$.

【典型例题】

【例 6-7】设有二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-x_2^2+x_3^2$，则 $f(x_1,x_2,x_3)$ 为（ ）.

A. 正定　　B. 负定

C. 不定　　D. 半正定

解：答案 C 标准型平方项前系数有正有负由定义可知答案选 C.

【例 6-8】设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ 正定，则（ ）.

A. $k>0$　　B. $k\geq 0$

C. $k>1$　　D. $k\geq 1$

解：答案 C 矩阵正定顺序主子式大于 0，即 $\begin{vmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{vmatrix}>0$ 且 $\begin{vmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{vmatrix}=4k(k-1)>0$

【例 6-9】设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & a \end{pmatrix}$ 是正定矩阵，则 a 的取值范围为____________.

解：答案 $a>4$ 因为矩阵正定则 $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & a \end{vmatrix}>0$，则 $a>4$

【例 6-10】设二次型 $f(x_1,x_2)=tx_1^2+x_2^2+2tx_1x_2$ 正定，则实数 t 的取值范围是________.

解：答案 $0<t<1$，二次型的矩阵为 $\begin{pmatrix} t & t \\ t & 1 \end{pmatrix}$，二次型正定则 $\begin{vmatrix} t & t \\ t & 1 \end{vmatrix}=t-t^2>0$，则 $0<t<1$

【同步练习及参考答案】

一、单项选择题

1.若二阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$合同，则二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的标准形是（　　）.

A. y_1^2　　B. y_2^2

C. $y_1^2+y_2^2$　　D. $-y_1^2+2y_2^2$

2. 对称矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$是（　　）.

A. 负定矩阵　　B. 正定矩阵

C. 半正定矩阵　　D. 不定矩阵

3. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$，则二次型 $f(x_1, x_2)=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 是（　　）.

A. 正定　　B. 负定

C. 半正定　　D. 不定

4. 设 3 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值分别为 2, 1, 0，则（　　）.

A. $\boldsymbol{A}$ 正定　　B. $\boldsymbol{A}$ 半正定

C. $\boldsymbol{A}$ 负定　　D. $\boldsymbol{A}$ 半负定

5. 设实二次型 $f(x_1, x_2, x_3)=x_2^2-x_3^2$，则该二次型 f（　　）.

A. 正定　　B. 不定

C. 负定　　D. 半正定

6. 二次型 $f\ (x_1,x_2,x_3)=3x_1^2+2x_2^2-x_3^2$ 是（　　）.

A. 正定的　　B. 负定的

C. 半正定的　　D. 不定的

7. 实二次型 $f(x_1, x_2, x_3)=x_1^2+2x_2^2-2x_1x_2+x_3^2$，则 f 是（　　）.

A. 负定　　B. 正定

C. 半正定　　D. 不定

8. 二次型 $f=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ ($\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵)正定的充要条件是（　　）.

A. $\boldsymbol{A}$ 可逆　　B. $|\boldsymbol{A}|>0$

C. $\boldsymbol{A}$ 的特征值全部大于 0　　D. $\boldsymbol{A}$ 的特征值之和大于 0

9. 设二次型 $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 正定，则下列结论中正确的是（　　）.

A. 对任意 n 维列向量 $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 都大于零

B. f 的标准形的系数都大于或等于零

C. $\boldsymbol{A}$ 的特征值都大于零

D. $\boldsymbol{A}$ 的所有子式都大于零

10．若 3 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 是正定矩阵，则 $\boldsymbol{A}$ 的 3 个特征值可能为（　　）.

A. -1,-2,-3　　B. -1,-2,3　　C. -1,2,3　　D. 1,2,3

11．以下关于正定矩阵叙述正确的是（　　）.

A. 正定矩阵的乘积一定是正定矩阵　　B. 正定矩阵的行列式一定小于零

C. 正定矩阵的行列式一定大于零　　D. 正定矩阵的差一定是正定矩阵

12．设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 为同阶方阵，且 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{B})$，则（　　）.

A. $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似　　B. $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|$

C. $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价　　D. $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同

13．若 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 相似，则下列说法错误的是（　　）.

A. $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价　　B. $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同

C. $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|$　　D. $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 有相同特征值

二、填空题

1．若 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&1\\1&a\end{pmatrix}$ 为正定矩阵，则实数 a 的取值范围为__________.

2．设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-2\\-2&k\end{pmatrix}$，若二次型 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 正定，则实数 k 的取值范围是_______.

3．设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&2-a&0\\0&0&3\end{pmatrix}$ 为正定矩阵，则 a 的取值范围是____________.

4．若实对称矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&a&0\\a&1&0\\0&0&a\end{pmatrix}$ 为正定矩阵，则 a 的取值应满足_____________.

5．已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+tx_3^2$ 正定，则实数 t 的取值范围是__________.

6．设 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_2^2+2x_3^2+2tx_1x_2+2x_1x_3$ 是正定二次型，则 t 满足__________.

7．若 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_2^2+4x_3^2+2\lambda x_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3$ 为正定二次型，则 λ 的取值应满足_________.

8．若实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+ax_2^2+a^2x_3^2+2x_1x_2$ 正定，则数 a 的取值范围是___________.

9．已知 3 元二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(1-a)x_1^2+x_2^2+(a+3)x_3^2$ 正定，则数 a 的最大取值范围是__________.

10．已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(k+1)x_1^2+(k-1)x_2^2+(k-2)x_3^2$ 正定，则数 k 的取值范

围为____________.

参考答案

一、单项选择题

1．D　2．B　3．B　4．B　5．B　6．D　7．B　8．C　9．C　10．D
11．C　12．C　13．B

二、填空题

1．$a>\frac{1}{2}$　2．$k>4$　3．$a<1$　4．$0<a<\sqrt{3}$　5．$t>0$　6．$-\sqrt{2}<t<\sqrt{2}$
7． $-2<\lambda<1$　8． $a>1$　9． $-3<a<1$　10． $k>2$

第二部分　历 年 真 题

全国 2012 年 1 月高等教育自学考试线性代数（经管类）试题

一、单项选择题（本大题共 10 小题，每小题 2 分，共 20 分）

1．设行列式$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=2$，则$\begin{vmatrix} 3a_{11} & 3a_{12} & 3a_{13} \\ -a_{31} & -a_{32} & -a_{33} \\ a_{21}-a_{31} & a_{22}-a_{32} & a_{23}-a_{33} \end{vmatrix}=$（　　）.

A．-6　　B．-3　　C．3　　D．6

2．设矩阵$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{X}$为同阶方阵，且$\boldsymbol{A}$可逆，若$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{E})=\boldsymbol{E}$，则矩阵$\boldsymbol{X}=$（　　）.

A．$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}^{-1}$　　B．$\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$　　C．$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$　　D．$\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^{-1}$

3．设矩阵$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$均为可逆方阵，则以下结论正确的是（　　）.

A．$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \\ & \boldsymbol{B} \end{pmatrix}$可逆，且其逆为$\begin{pmatrix} & \boldsymbol{A}^{-1} \\ \boldsymbol{B}^{-1} & \end{pmatrix}$

B．$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \\ & \boldsymbol{B} \end{pmatrix}$不可逆

C．$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \\ & \boldsymbol{B} \end{pmatrix}$可逆，且其逆为$\begin{pmatrix} & \boldsymbol{B}^{-1} \\ \boldsymbol{A}^{-1} & \end{pmatrix}$

D．$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \\ & \boldsymbol{B} \end{pmatrix}$可逆，且其逆为$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}^{-1} & \\ & \boldsymbol{B}^{-1} \end{pmatrix}$

4．设$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_k$是 n 维列向量，则$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_k$线性无关的充分必要条件是（　　）.

A．向量组$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_k$中任意两个向量线性无关

B．存在一组不全为 0 的数$l_1, l_2, \cdots, l_k$，使得$l_1\boldsymbol{\alpha}_1+l_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots l_k\boldsymbol{\alpha}_k \neq \boldsymbol{0}$

C．向量组$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_k$中存在一个向量不能由其余向量线性表示

D．向量组$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_k$中任意一个向量都不能由其余向量线性表示

5．已知向量$2\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=(1,-2,-2,-1)^{\mathrm{T}}$，$3\boldsymbol{\alpha}+2\boldsymbol{\beta}=(1,-4,-3,0)^{\mathrm{T}}$，则$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=$（　　）.

A．$(0,\ -2,\ -1,\ 1)^{\mathrm{T}}$　　B．$(-2,\ 0,\ -1,\ 1)^{\mathrm{T}}$

C．$(1,\ -1,\ -2,\ 0)^{\mathrm{T}}$　　D．$(2,\ -6,\ -5,\ -1)^{\mathrm{T}}$

6．实数向量空间$V=\{(x,y,z)\,|\,3x+2y+5z=0\}$的维数是（　　）.

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

7．设$\boldsymbol{\alpha}$是非齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的解，$\boldsymbol{\beta}$是其导出组$\boldsymbol{Ax}=0$的解，则以下结论正确的是（　　）．

A．$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$是$\boldsymbol{Ax}=0$的解　　B．$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$是$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的解

C．$\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha}$是$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的解　　D．$\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}$是$\boldsymbol{Ax}=0$的解

8．设三阶方阵$\boldsymbol{A}$的特征值分别为$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, 3$，则$\boldsymbol{A}^{-1}$的特征值为（　　）．

A．$2, 4, \frac{1}{3}$　　B．$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}$　　C．$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, 3$　　D．$2, 4, 3$

9．设矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & & \\ & 2 & \\ & & -1\end{pmatrix}$，则与矩阵$\boldsymbol{A}$相似的矩阵是（　　）．

A．$\begin{pmatrix}1 & -1 & \\ -1 & 2 & \\ & & 3\end{pmatrix}$　　B．$\begin{pmatrix}0 & 1 & \\ 1 & 0 & \\ & & 2\end{pmatrix}$　　C．$\begin{pmatrix}-2 & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{pmatrix}$　　D．$\begin{pmatrix}1 & & \\ & -2 & \\ & & 1\end{pmatrix}$

10．以下关于正定矩阵叙述正确的是（　　）．

A．正定矩阵的乘积一定是正定矩阵　　B．正定矩阵的行列式一定小于零

C．正定矩阵的行列式一定大于零　　D．正定矩阵的差一定是正定矩阵

二、填空题（本大题共 10 小题，每小题 2 分，共 20 分）

11．设$\det(\boldsymbol{A})=-1$，$\det(\boldsymbol{B})=2$，且$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$为同阶方阵，则$\det((\boldsymbol{AB})^3)=$____________．

12．设 3 阶矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & -2 \\ 4 & t & 3 \\ 3 & -1 & 1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}$为 3 阶非零矩阵，且$\boldsymbol{AB}=0$，则$t$____________．

13．设方阵$\boldsymbol{A}$满足$\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{E}$，这里$k$为正整数，则矩阵$\boldsymbol{A}$的逆$\boldsymbol{A}^{-1}=$______________．

14．实向量空间$\boldsymbol{R}^n$的维数是______________．

15．设$\boldsymbol{A}$是$m\times n$矩阵，$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=r$，则$\boldsymbol{Ax}=0$的基础解系中含解向量的个数为______________．

16．非齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$有解的充分必要条件是______________．

17．设$\boldsymbol{\alpha}$是齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=0$的解，而$\boldsymbol{\beta}$是非齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的解，则$\boldsymbol{A}(3\boldsymbol{\alpha}+2\boldsymbol{\beta})=$______________．

18．设方阵$\boldsymbol{A}$有一个特征值为 8，则$\det(-8\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})=$______________．

19．设$\boldsymbol{P}$为n阶正交矩阵，$\boldsymbol{x}$是n维单位长的列向量，则$\|\boldsymbol{Px}\|=$______________．

20．二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+5x_2^2+6x_3^2+4x_1x_2-2x_1x_3-2x_2x_3$的正惯性指数是______________．

三、计算题（本大题共 6 小题，每小题 9 分，共 54 分）

21．计算行列式$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & -4 & 1 \\ 2 & 4 & -6 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \end{vmatrix}$.

22．设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & & \\ & 3 & \\ & & 5 \end{pmatrix}$，且矩阵 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{ABA}^{-1}=4\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{BA}^{-1}$，求矩阵 $\boldsymbol{B}$.

23．设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(3,1,2,0),\ \boldsymbol{\alpha}_2=(0,7,1,3),\ \boldsymbol{\alpha}_3=(-1,2,0,1),\ \boldsymbol{\alpha}_4=(6,9,4,3)$，求其一个极大线性无关组，并将其余向量通过极大线性无关组表示出来.

24．设三阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 \\ -2 & 5 & 3 \\ 2 & -4 & -2 \end{pmatrix}$，求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值和特征向量.

25．求齐次线性方程组$\begin{cases} x_1+x_3-5x_4=0 \\ 2x_1+x_2-3x_4=0 \\ x_1+x_2-x_3+2x_4=0 \end{cases}$ 的通解.

26．求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 6 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$的秩.

四、证明题（本大题共 6 分）

27．设三阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ 的行列式不等于 0，证明：$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix}$线性无关.

全国2012年4月高等教育自学考试线性代数（经管类）试题

一、单项选择题（本大题共10小题，每小题2分，共20分）

1．设行列式$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$=2，则$\begin{vmatrix} -a_{11} & 2a_{12} & -3a_{13} \\ -a_{21} & 2a_{22} & -3a_{23} \\ -a_{31} & 2a_{32} & -3a_{33} \end{vmatrix}=$（　　）.

A．-12　　B．-6　　C．6　　D．12

2．设矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$，则$\boldsymbol{A}^*$中位于第1行第2列的元素是（　　）.

A．-6　　B．-3　　C．3　　D．6

3．设$\boldsymbol{A}$为3阶矩阵，且$|\boldsymbol{A}|=3$，则$\left|(-\boldsymbol{A})^{-1}\right|=$（　　）.

A．-3　　B．$-\frac{1}{3}$　　C．$\frac{1}{3}$　　D．3

4．已知4×3矩阵$\boldsymbol{A}$的列向量组线性无关，则$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$的秩等于（　　）.

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

5．设$\boldsymbol{A}$为3阶矩阵，$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，则用$\boldsymbol{P}$左乘$\boldsymbol{A}$，相当于将$\boldsymbol{A}$（　　）.

A．第1行的2倍加到第2行　　B．第1列的2倍加到第2列

C．第2行的2倍加到第1行　　D．第2列的2倍加到第1列

6．齐次线性方程组$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3 = 0 \\ -x_2+x_3-x_4 = 0 \end{cases}$的基础解系所含解向量的个数为（　　）.

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

7．设4阶矩阵$\boldsymbol{A}$的秩为3，$\boldsymbol{\eta}_1$，$\boldsymbol{\eta}_2$为非齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的两个不同的解，$c$为任意常数，则该方程组的通解为（　　）.

A．$\boldsymbol{\eta}_1+c\frac{\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2}{2}$　　B．$\frac{\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2}{2}+c\boldsymbol{\eta}_1$

C．$\boldsymbol{\eta}_1+c\frac{\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\eta}_2}{2}$　　D．$\frac{\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\eta}_2}{2}+c\boldsymbol{\eta}_1$

8．设$\boldsymbol{A}$是n阶方阵，且$|5\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E}|=0$，则$\boldsymbol{A}$必有一个特征值为（　　）.

A．$-\frac{5}{3}$　　B．$-\frac{3}{5}$　　C．$\frac{3}{5}$　　D．$\frac{5}{3}$

9. 若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与对角矩阵 $\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ 相似，则 $\boldsymbol{A}^3=$（　　）.

A. $\boldsymbol{E}$　　B. $\boldsymbol{D}$　　C. $\boldsymbol{A}$　　D. $-\boldsymbol{E}$

10. 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=3x_1^2+2x_2^2-x_3^2$ 是（　　）.

A. 正定的　　B. 负定的

C. 半正定的　　D. 不定的

二、填空题（本大题共 10 小题，每小题 2 分，共 20 分）

11. 行列式 $\begin{vmatrix}1&1&1\\2&4&6\\4&16&36\end{vmatrix}=$__________.

12. 设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 2，矩阵 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$，若矩阵 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{QAP}$，则 $\mathrm{r}(\boldsymbol{B})=$__________.

13. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-4\\-1&4\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}4&8\\1&2\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{AB}=$__________.

14. 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1,1)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,2,3,4)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(0,1,2,3)$的秩为__________.

15. 设 $\boldsymbol{\eta}_1$，$\boldsymbol{\eta}_2$ 是 5 元齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=0$ 的基础解系，则 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=$__________.

16. 非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的增广矩阵经初等行变换化为 $\left(\begin{array}{cccc:c}1&0&0&0&2\\0&1&0&0&2\\0&0&1&2&-2\end{array}\right)$，则方程组的通解是____________________.

17. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵，若 $\boldsymbol{A}$ 的三个特征值分别为 1，2，3，则$|\boldsymbol{A}|=$__________.

18. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵，且$|\boldsymbol{A}|=6$，若 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值为 2，则 $\boldsymbol{A}^*$必有一个特征值为__________.

19. 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-x_2^2+3x_3^2$ 的正惯性指数为__________.

20. 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-2x_2^2-2x_3^2+4x_2x_3$ 经正交变换可化为标准形__________.

三、计算题（本大题共 6 小题，每小题 9 分，共 54 分）

21．计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 3 & 5 & -1 & 2 \\ -4 & 5 & 3 & -3 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -3 & 4 \end{vmatrix}$.

22．设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$，矩阵 $\boldsymbol{X}$ 满足关系式 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}$，求 $\boldsymbol{X}$.

23. 设 $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$，$\boldsymbol{\gamma}_2$，$\boldsymbol{\gamma}_3$，$\boldsymbol{\gamma}_4$ 均为 4 维列向量，$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}，\boldsymbol{\gamma}_2，\boldsymbol{\gamma}_3，\boldsymbol{\gamma}_4)$和 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}，\boldsymbol{\gamma}_2，\boldsymbol{\gamma}_3，\boldsymbol{\gamma}_4)$ 为 4 阶方阵．若行列式$|\boldsymbol{A}|=4$，$|\boldsymbol{B}|=1$，求行列式$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|$的值.

24．已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1，2，-1，1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(2，0，t，0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(0，-4，5，-2)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(3，-2，t+4，-1)^{\mathrm{T}}$（其中 t 为参数），求向量组的秩和一个极大无关组.

25．求线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+2x_3+x_4=3 \\ x_1+2x_2+x_3-x_4=2 \\ 2x_1+x_2+5x_3+4x_4=7 \end{cases}$ 的通解.（要求用它的一个特解和导出组的基础解系表示）

26．已知向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1，1，1)^{\mathrm{T}}$，求向量 $\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$，使 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 两两正交.

四、证明题（本大题共 6 分）

27．设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 实矩阵，$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵．证明：线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=0$ 只有零解.

全国2012年7月高等教育自学考试线性代数（经管类）试题

一、单项选择题（本大题共10小题，每小题2分，共20分）

1．设$\boldsymbol{A}$为三阶矩阵，且$|\boldsymbol{A}^{-1}|=3$，则$|-3\boldsymbol{A}|=$（　　）

A．-9　　B．-1　　C．1　　D．9

2．设$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，其中$\boldsymbol{\alpha}_i(i=1,2,3)$是三维列向量，若$|\boldsymbol{A}|=1$，则$|(4\boldsymbol{\alpha}_1,2\boldsymbol{\alpha}_1-3\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)|=$（　　）．

A．-24　　B．-12　　C．12　　D．24

3．设$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$均为方阵，则下列结论中正确的是（　　）．

A．若$|\boldsymbol{AB}|=0$，则$\boldsymbol{A}=0$或$\boldsymbol{B}=0$　　B．若$|\boldsymbol{AB}|=0$，则$|\boldsymbol{A}|=0$或$|\boldsymbol{B}|=0$

C．若$\boldsymbol{AB}=0$，则$\boldsymbol{A}=0$或$\boldsymbol{B}=0$　　D．若$\boldsymbol{AB}\neq 0$，则$|\boldsymbol{A}|\neq 0$或$|\boldsymbol{B}|\neq 0$

4．设$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$均为n阶可逆阵，则下列等式成立的是（　　）．

A．$(\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^{-1}$　　B．$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$

C．$|(\boldsymbol{AB})^{-1}|=\dfrac{1}{|\boldsymbol{AB}|}$　　D．$|(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}|=|\boldsymbol{A}^{-1}|+|\boldsymbol{B}^{-1}|$

5．设$\boldsymbol{A}$为$m\times n$矩阵，且$m<n$，则齐次方程$\boldsymbol{AX}=0$必（　　）．

A．无解　　B．只有唯一解　　C．有无穷解　　D．不能确定

6．设$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&1&1\\0&2&1\\0&0&3\end{pmatrix}$，则$r(\boldsymbol{A})=$（　　）．

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

7．若$\boldsymbol{A}$为正交矩阵，则下列矩阵中不是正交矩阵的是（　　）．

A．$\boldsymbol{A}^{-1}$　　B．$2\boldsymbol{A}$　　C．$\boldsymbol{A}^2$　　D．$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$

8．设三阶矩阵$\boldsymbol{A}$有特征值0，1，2，其对应特征向量分别为ξ_1,ξ_2,ξ_3，令$\boldsymbol{P}=(\xi_3,\xi_1,2\xi_2)$，则$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=$（　　）．

A．$\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$　　B．$\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$　　C．$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&4\end{pmatrix}$　　D．$\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&0\\0&0&2\end{pmatrix}$

9．设$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$为同阶方阵，且$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{B})$，则（　　）．

A．$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$等价　　B．$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$合同　　C．$|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|$　　D．$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$相似

10．实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2-2x_1x_2+x_3^2$，则 f 是（　　）.

A．负定　　B．正定　　C．半正定　　D．不定

二、填空题（本大题共10小题，每小题2分，共20分）

11．设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 均为三阶方阵，$|\boldsymbol{A}|=4$，$|\boldsymbol{B}|=5$，则 $|2\boldsymbol{AB}|=$____________.

12．设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&1\\3&1&0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}=$____________.

13．设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}^{-1}=$____________.

14．若 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&2&1\\1&2&4\\1&4&\boldsymbol{t}\end{pmatrix}$，且 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=2$，则 $t=$____________.

15．设 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}-2\\-2\\0\end{pmatrix}$，则由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 所生成的线性空间 $\boldsymbol{L}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$ 的维数是________.

16．设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶方阵，其特征值分别为1，2，3，则 $|\boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{E}|=$____________.

17．设 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}1\\2\\t\end{pmatrix}$，且 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 正交，则 $\boldsymbol{t}=$____________.

18．方程 $x_1+x_2-x_3=1$ 的通解是__________________.

19．二次型 $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4+5x_4^2$ 所对应的对称矩阵是_________.

20．若 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\\0&1&0\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0&x\end{pmatrix}$ 是正交矩阵，则 $x=$____________.

三、计算题（本大题共6小题，每小题9分，共54分）

21．计算行列式 $\begin{vmatrix}1&1&1&2\\1&1&2&1\\1&2&1&1\\2&1&1&1\end{vmatrix}$.

22．设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&1&1\\-1&0&-1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&-1\\2&0\\5&-3\end{pmatrix}$，且 $\boldsymbol{X}$ 满足 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{AX}+\boldsymbol{B}$，求 $\boldsymbol{X}$．

23．求线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_2=5\\2x_1+x_2+x_3+2x_4=1\\5x_1+3x_2+2x_3+2x_4=3\end{cases}$ 的通解.

24．求向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(2,4,2)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,0)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(2,3,1)$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(3,5,2)$ 的一个极大无关组，并把其余向量用该极大无关组表示.

25．设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&-1&1\\3&2&\lambda&-1\\5&6&3&t\end{pmatrix}$，已知 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=2$，求 λ，t 的值.

26．已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&-2&0\\-2&6&0\\0&0&3\end{pmatrix}$，求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ 为对角阵.

四、证明题（本大题共 6 分）

27．设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 是四维向量，且线性无关，证明 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\beta}_4=\boldsymbol{\alpha}_4+\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性相关.

全国2012年10月高等教育自学考试线性代数（经管类）试题

一、单项选择题（本大题共10小题，每小题2分，共20分）

1．设行列式$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=1$，$\begin{vmatrix} a_1 & -c_1 \\ a_2 & -c_2 \end{vmatrix}=-1$，则行列式$\begin{vmatrix} a_1 & b_1-c_1 \\ a_2 & b_2-c_2 \end{vmatrix}=$（　　）.

A．-1　　B．0　　C．1　　D．2

2．设$\boldsymbol{A}$是n阶矩阵，$\boldsymbol{O}$是n阶零矩阵，且$\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$，则必有（　　）.

A．$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$　　B．$\boldsymbol{A}=-\boldsymbol{E}$　　C．$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^{-1}$　　D．$|\boldsymbol{A}|=1$

3．$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{a} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} & 0 \end{pmatrix}$为反对称矩阵，则必有（　　）.

A．$a=b=-1$，$c=0$　　B．$a=c=-1$，$b=0$

C．$a=c=0$，$b=-1$　　D．$b=c=-1$，$a=0$

4．设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=(2,0,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(0,0,-1)^{\mathrm{T}}$，则下列向量中可以由$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$线性表示的是（　　）.

A．$(-1,-1,-1)^{\mathrm{T}}$　　B．$(0,-1,-1)^{\mathrm{T}}$

C．$(-1,-1,0)^{\mathrm{T}}$　　D．$(-1,0,-1)^{\mathrm{T}}$

5．已知4×3矩阵$\boldsymbol{A}$的列向量组线性无关，则$\mathrm{r}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})=$（　　）.

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

6．设$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$是非齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的两个解向量，则下列向量中为方程组解的是（　　）.

A．$\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2$　　B．$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$　　C．$\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$　　D．$\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_1+\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_2$

7．齐次线性方程组$\begin{cases} x_1+x_3+x_4=0 \\ x_2-x_3+2x_4=0 \end{cases}$的基础解系所含解向量的个数为（　　）.

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

8．若矩阵$\boldsymbol{A}$与对角矩阵$\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$相似，则$\boldsymbol{A}^2=$（　　）.

A．$\boldsymbol{E}$　　B．$\boldsymbol{A}$　　C．$-\boldsymbol{E}$　　D．$2\boldsymbol{E}$

9．设3阶矩阵$\boldsymbol{A}$的一个特征值为-3，则$-\boldsymbol{A}^2$必有一个特征值为（　　）.

A．-9　　B．-3　　C．3　　D．9

10．二次型$f(x_1,\ x_2,\ x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$的规范形为（　　）.

A. $z_1^2-z_2^2$　　B. $z_1^2+z_2^2$　　C. z_1^2　　D. $z_1^2+z_2^2+z_3^2$

二、填空题（本大题共 10 小题，每小题 2 分，共 20 分）

11．行列式$\begin{vmatrix}1&2&3\\1&1&1\\3&2&1\end{vmatrix}$的值为_________.

12．设矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4&3\\2&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$，则$\boldsymbol{PAP}^2$_________.

13．设向量$\boldsymbol{\alpha}=(1,2,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}=(-1,\ -2,\ -3)^{\mathrm{T}}$，则$3\boldsymbol{\alpha}-2\boldsymbol{\beta}$_________.

14．若$\boldsymbol{A}$为 3 阶矩阵，且$|\boldsymbol{A}|=\dfrac{1}{9}$，则$|(3\boldsymbol{A})^{-1}|$_________.

15．设$\boldsymbol{B}$是 3 阶矩阵，$\boldsymbol{O}$是 3 阶零矩阵，$\mathrm{r}(\boldsymbol{B})=1$，则分块矩阵$\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{B}&-\boldsymbol{B}\end{pmatrix}$的秩为_________.

16．向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=(\mathrm{k},-2,2)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(4,8,-8)^{\mathrm{T}}$线性相关，则数$k$=_________.

17．若线性方程组$\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=1\\-2x_2+x_3=-2\\(\lambda+1)x_3=-\lambda\end{cases}$无解，则数$\lambda=$_________.

18．已知$\boldsymbol{A}$为 3 阶矩阵，$\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2$为齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=0$的基础解系，则$|\boldsymbol{A}|=$_________.

19．设$\boldsymbol{A}$为 3 阶实对称矩阵，$\boldsymbol{\alpha}_1=(0,1,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,2,x)^{\mathrm{T}}$分别为$\boldsymbol{A}$的对应于不同特征值的特征向量，则数$x=$_________.

20．已知矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&-1\\1&-1&2\end{pmatrix}$，则对应的二次型$f(x_1,x_2,x_3)=$_________.

三、计算题（本大题共 6 小题，每小题 9 分，共 54 分）

21．计算行列式$\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix}a+b&a&b\\a&a+b&b\\a&b&a+b\end{vmatrix}$的值.

22．设矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\-2&2&2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&1&2\\0&2&2\\0&4&6\end{pmatrix}$，求满足方程$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$的矩阵$\boldsymbol{X}$.

23．设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\-4\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}2\\4\\6\\3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\\1\end{pmatrix}$，求该向量组的秩和一个极大线性无关组.

24．求解非齐次线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_2-x_3-x_4=1\\2x_1+x_2+x_3+x_4=4\\4x_1+3x_2-x_3-x_4=6\end{cases}$．(要求用它的一个特解和导出组的基础解系表示)

25．求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$ 的全部特征值和特征向量.

26．确定 a，b 的值，使二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=ax_1^2+2x_2^2-2x_3^2+2bx_1x_3$ 的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值之和为 1，特征值之积为 -12．

四、证明题（本大题共 6 分）

27．设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶($n\geq 2$)可逆矩阵，证明$(\boldsymbol{AB})^*=\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{A}^*$.

全国2013年1月高等教育自学考试线性代数（经管类）试题

一、单项选择题（本大题共10小题，每小题2分，共20分）

1．设$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$为同阶方阵，则必有（　　）.

A．$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}|+|\boldsymbol{B}|$　B．$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$　C．$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$　D．$|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{BA}|$

2．设n阶方阵$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$满足$\boldsymbol{ABC}=\boldsymbol{E}$，则必有（　　）.

A．$\boldsymbol{ACB}=\boldsymbol{E}$　B．$\boldsymbol{CBA}=\boldsymbol{E}$　C．$\boldsymbol{BCA}=\boldsymbol{E}$　D．$\boldsymbol{BAC}=\boldsymbol{E}$

3．设$\boldsymbol{A}$为三阶方阵，且$|\boldsymbol{A}|=2$，则$|-2\boldsymbol{A}|=$（　　）.

A．-16　B．-4　C．4　D．16

4．若同阶方阵$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$等价，则必有（　　）.

A．$|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|$　B．$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$相似　C．$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{R}(\boldsymbol{B})$　D．$\sum_{i=1}^{n}a_{ii}=\sum_{i=1}^{n}b_{ii}$

5．设$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,0)$、$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,0,0)$、$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,1,0)$，则（　　）.

A．$\boldsymbol{\alpha}_1$、$\boldsymbol{\alpha}_2$、$\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关　B．$\boldsymbol{\alpha}_3$可由$\boldsymbol{\alpha}_1$、$\boldsymbol{\alpha}_2$线性表示

C．$\boldsymbol{\alpha}_1$可由$\boldsymbol{\alpha}_2$、$\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示　D．$\boldsymbol{\alpha}_1$、$\boldsymbol{\alpha}_2$、$\boldsymbol{\alpha}_3$的秩等于3

6．设$\boldsymbol{\alpha}_1$、$\boldsymbol{\alpha}_2$是非齐次方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的解，$\boldsymbol{\beta}$是对应齐次方程组的解，则$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$一定有一个解是（　　）.

A．$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$　B．$\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2$

C．$\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$　D．$\frac{1}{3}\boldsymbol{\alpha}_1+\frac{2}{3}\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\beta}$

7．若3阶方阵$\boldsymbol{A}$与对角阵$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&0\\0&0&3\end{pmatrix}$相似，则下列说法错误的是（　　）.

A．$|\boldsymbol{A}|=0$　B．$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|=0$

C．$\boldsymbol{A}$有三个线性无关特征向量　D．$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A})=2$

8．齐次方程$x_1+x_2-x_3=0$的基础解系所含向量个数是（　　）.

A．0　B．1　C．2　D．3

9．若$\boldsymbol{\alpha}=(1,1,t)$与$\boldsymbol{\beta}=(1,1,1)$正交，则$t=$（　　）.

A．-2　B．-1　C．0　D．1

10．对称矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$是（　　）.

A．负定矩阵　B．正定矩阵

C．半正定矩阵　D．不定矩阵

二、填空题（本大题共 10 小题，每小题 2 分，共 20 分）

11．设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 均为三阶可逆方阵，且$|\boldsymbol{A}|=2$，则$|-2\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}|=$____________.

12．四阶行列式中项$\alpha_{21}\alpha_{32}\alpha_{13}\alpha_{44}$的符号为____________.

13．设$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}$ 的伴随阵 $\boldsymbol{A}^*=$____________.

14．设$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 2 & 3\\ 1 & 0 & t\end{pmatrix}$，且 $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A})=2$，则 $t=$____________.

15．设三阶方阵 $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]$，其中 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的列向量，且$|\boldsymbol{A}|=3$，若 $\boldsymbol{B}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3]$，则$|\boldsymbol{B}|=$____________.

16．三元方程组$\begin{cases}x_1+x_3=0\\ x_1-x_2=0\end{cases}$的通解是____________.

17．设$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 4\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}$ 的特征值是____________.

18．若三阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值分别为 1，2，3，则$|\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}|=$____________.

19．若$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & x\end{pmatrix}$与$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$相似，则 $x=$____________.

20．实对称矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$的正交相似标准形矩阵是____________.

三、计算题（本大题共 6 小题，每小题 9 分，共 54 分）

21．计算四阶行列式$\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ -1 & 2 & 3 & 4\\ -1 & -2 & 3 & 4\\ -1 & -2 & -3 & 4\end{vmatrix}$.

22．设$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 1 & 5\\ 0 & 4 & -2\\ 4 & -3 & 1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}$ 是三阶方阵，且满足 $\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E}$，求 $\boldsymbol{B}$.

23．设$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,2,3),\boldsymbol{\alpha}_2=(1,-1,1,1),\boldsymbol{\alpha}_3=(1,3,3,5),\boldsymbol{\alpha}_4=(4,-2,5,6),\boldsymbol{\alpha}_5=(-3,-1,-5,-7)$，试求向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5$的秩和一个极大无关组.

24．设四元方程组$\begin{cases}x_1-x_2+3x_3+2x_4=3\\ 2x_1-x_2+2x_3-x_4=2\\ x_1-2x_2+7x_3+7x_4=t\end{cases}$，问 t 取何值时该方程组有解？并在有解

时求其通解.

25．设矩阵 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}-1 & -4\\ 1 & 1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 由矩阵方程 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{D}$ 确定，试求 $\boldsymbol{A}^5$.

26．求正交变换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{Y}$，化二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=-2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$ 为标准形.

四、证明题（本大题共 6 分）

27．证明任意 4 个 3 维向量组线性相关.

全国2013年4月高等教育自学考试线性代数（经管类）试题

一、单项选择题（本大题共5小题，每小题2分，共10分）

1．行列式$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$中$a_{22}$的代数余子式为（　　）.

A．$\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$　　B．$-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$　　C．$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$　　D．$-\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$

2．设$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$均为n阶矩阵，$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{B}^2$的充分必要条件是（　　）.

A．$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$　　B．$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$　　C．$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$　　D．$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$

3．设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关，则下列向量组中线性无关的是（　　）.

A．$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3$　　B．$\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1$

C．$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,2\boldsymbol{\alpha}_1-3\boldsymbol{\alpha}_2$　　D．$\boldsymbol{\alpha}_2,2\boldsymbol{\alpha}_3,2\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$

4. 4元齐次线性方程组$\begin{cases} 2x_2-x_3-x_4=0 \\ x_1+x_2+x_3=0 \\ x_1+3x_2-x_4=0 \end{cases}$的基础解系所含解向量的个数为（　　）.

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

5．设-2是3阶矩阵$\boldsymbol{A}$的一个特征值，则$\boldsymbol{A}^2$必有一个特征值为（　　）.

A．-8　　B．-4　　C．4　　D．8

二、填空题（本大题共10小题，每小题2分，共20分）

6．已知行列式$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=3$，则$\begin{vmatrix} a_1 & 2b_1+c_1 & c_1 \\ a_2 & 2b_2+c_2 & c_2 \\ a_3 & 2b_3+c_3 & c_3 \end{vmatrix}=$____________.

7．$\boldsymbol{A}$是3阶矩阵，若$|\boldsymbol{A}^*|=4$，且$|\boldsymbol{A}|<0$，则$|\boldsymbol{A}|=$____________.

8．设矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$，则$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=$____________.

9．设$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-2,5)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(4,7,-2)$，则$-2\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2=$____________.

10．3元齐次线性方程组$\begin{cases} x_1+2x_2=0 \\ x_3=0 \end{cases}$的一个基础解系为________________.

11．设$\boldsymbol{A}$为3阶矩阵，$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=2$，若存在可逆矩阵$\boldsymbol{P}$，使$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$，则$\mathrm{r}(\boldsymbol{B})=$______

______.

12．已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,-1,1)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,0,t,0)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(-1,2,-4,1)$ 的秩为 2，则 $t=$______.

13．设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵，2 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个 2 重特征值，-1 为它的另一个特征值，则 $|\boldsymbol{A}|=$______.

14．设向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,-1)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(3,2,1)$，则内积 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)=$______.

15．设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&-2\\0&-2&0\end{pmatrix}$，则二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=$______.

三、计算题（本大题共 7 小题，每小题 9 分，共 63 分）

16．计算行列式 $D=\begin{vmatrix}1&0&0&a\\-1&1&0&b\\0&-1&1&c\\0&0&-1&d\end{vmatrix}$，其中 a，b，c，d 为常数.

17．已知 $\boldsymbol{X}\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&2&2\\0&-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1&-1\\4&0&-1\end{pmatrix}$，求矩阵 $\boldsymbol{X}$.

18．设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵，将 $\boldsymbol{A}$ 的第 1 列与第 2 列互换得到矩阵 $\boldsymbol{B}$，再将 $\boldsymbol{B}$ 的第 2 列加到第 3 列得到矩阵 $\boldsymbol{C}$，求满足关系式 $\boldsymbol{AQ}=\boldsymbol{C}$ 的矩阵 $\boldsymbol{Q}$.

19．设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\-3\\2\\4\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}3\\0\\2\\-1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}0\\-1\\4\\9\end{pmatrix}$，判定 $\boldsymbol{\alpha}_4$ 是否可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，若可以，求出其表示式.

20．已知 4 元线性方程组 $\begin{cases}x_1-x_2=a\\x_2-x_3=2a\\x_3-x_4=3a\\-x_1+x_4=1\end{cases}$，

（1）确定 a 的值，使方程组有解；

（2）在有解时，求出其通解（要求用它的一个特解和导出组的基础解系表示）.

21．求正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Py}$，将二次型 $f(x_1,x_2)=3x_1^2-2x_1x_2+3x_2^2$ 化为标准形，并指出 f

是否为正定二次型.

22. 求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&2&1\end{pmatrix}$ 的特征值，并判定 $\boldsymbol{A}$ 能否与对角矩阵相似（需说明理由）.

四、证明题（本大题共 7 分）

23. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵，k 为正整数，且 $\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{0}$，证明 $\boldsymbol{A}$ 的特征值均为 0.

全国2013年7月高等教育自学考试线性代数（经管类）试题

一、单项选择题（本大题共10小题，每小题2分，共20分）

1．设行列式$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=1$，则$\begin{vmatrix} 3a_{11}-4a_{12} & 2a_{11} & a_{13} \\ 3a_{21}-4a_{22} & 2a_{21} & a_{23} \\ 3a_{31}-4a_{32} & 2a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}=$（　　）.

A．-8　　B．-6　　C．6　　D．8

2．设3阶矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}^*$为$\boldsymbol{A}$的伴随矩阵，则$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=$（　　）.

A．$\boldsymbol{E}$　　B．$2\boldsymbol{E}$　　C．$6\boldsymbol{E}$　　D．$8\boldsymbol{E}$

3．下列矩阵中，不是初等方阵的是（　　）.

A．$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$　　B．$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　　C．$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$　　D．$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

4．向量空间$\boldsymbol{V}=\{(a,2a,3a)\,|\,a\text{为任意实数}\}$的维数是（　　）.

A．0　　B．1　　C．2　　D．3

5．设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性相关，则（　　）.

A．$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$中至少有一个向量可由其它向量线性表出

B．$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$全是非零向量

C．$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$全是零向量

D．$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$中至少有一个零向量

6．齐次线性方程组$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ 2x_2-x_3-x_4=0 \end{cases}$的基础解系中所含解向量的个数为（　　）.

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

7．设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$是非齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的解，$\boldsymbol{\beta}$是对应的齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的解，则$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$有解（　　）.

A．$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$　　B．$\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2$　　C．$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\beta}$　　D．$2\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\beta}$

8．设三阶矩阵$\boldsymbol{A}$的特征值为1，2，-1，则$|\boldsymbol{A}|$=（　　）.

A．-3　　B．-2　　C．2　　D．3

9．设$\boldsymbol{A}$为正交矩阵，则以下结论不正确的是（　　）.

A．$\boldsymbol{A}$的行列式一定等于1　　B．$\boldsymbol{A}^{-1}$是正交矩阵

C．$\boldsymbol{A}$ 的列向量组为正交单位向量组　　D．$\boldsymbol{A}$ 的行向量组为正交单位向量组

10. 若二阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ 合同，则二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的标准形是（　　）.

A. y_1^2　　B. y_2^2　　C. $y_1^2+y_2^2$　　D. $-y_1^2+2y_2^2$

二、填空题（本大题共 10 小题，每小题 2 分，共 20 分）

11．设行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 5 & a \end{vmatrix}=0$，则 $a=$____________.

12．设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为同阶方阵，且 $\boldsymbol{AB}=0$，则 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}^2=$____________.

13．设 $\boldsymbol{A}$ 为方阵，且 $|\boldsymbol{A}|=2$，则 $|\boldsymbol{A}^{-1}|=$____________.

14．设向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,3)$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(0,0,2)$, 则 $2\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2=$____________.

15．向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,0)$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,0)$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(1,1,1)$ 的秩为____________.

16．设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 实矩阵，则秩（$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$）_______秩（$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$）.（填“ = ”或“ ≠ ”）

17．若非齐次线性方程组 $\begin{cases} ax_1+ax_2+\cdots+ax_n=k \\ bx_1+bx_2+\cdots+bx_n=l \end{cases}$（$a,b,k,l$ 均不为 0）无解，则____________.

18．设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 2 & & \\ & 3 & \\ & & -3 \end{pmatrix}$ 相似，则 $|\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{E}|=$____________.

19．设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶正交矩阵，$X=(1,2,2)^{\mathrm{T}}$，则 $\|\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{X}\|=$____________.

20. 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2-2x_3^2+2x_1x_2$ 的正惯性指数为 p，负惯性指数为 q，则 $p-q=$_______.

三、计算题（本大题共 6 小题，每小题 9 分，共 54 分）

21．计算行列式 $\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & x & -1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}$.

22．设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ -1 & 20 & 4 \\ 1 & 18 & 4 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$，若矩阵 $\boldsymbol{X}$ 满足 $(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{X})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$，求 $\boldsymbol{X}$.

23．设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}-3\\1\\2\\4\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}0\\3\\2\\-1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}-1\\0\\4\\9\end{pmatrix}$，试判断$\boldsymbol{\alpha}_4$是否可以由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示，如果可以，将$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$表示出来.

24．求非齐次线性方程组$\begin{cases}x_1-x_2=2\\3x_1+2x_2+3x_3=1\end{cases}$的通解.

25．设三阶方阵$\boldsymbol{A}$的三个特征值为$\lambda_1=1,\lambda_2=0,\lambda_3=-1$，且$\boldsymbol{A}$的属于$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$的特征向量依次为$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}0\\2\\5\end{pmatrix}$，求矩阵$\boldsymbol{A}$.

26．设实二次型$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_2^2+3x_3^2+2tx_1x_2+2x_1x_3$，求$t$应满足的条件使得$f(x_1,x_2,x_3)$为正定二次型.

四、证明题（本大题共 6 分）

27．设向量$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关，证明：$2\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2,2\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2+4\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关.

全国2013年10月高等教育自学考试线性代数（经管类）试题

一、单项选择题（本大题共 5 小题，每小题 2 分，共 10 分）

1．设行列式$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$=1，$\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$= -2，则$\begin{vmatrix} a_1 & b_1+c_1 \\ a_2 & b_2+c_2 \end{vmatrix}$=（　　）．

A．-3　　B．-1　　C．1　　D．3

2．设矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$，则$\boldsymbol{A}^{-1}$=（　　）．

A．$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$　　B．$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

C．$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　　D．$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

3．设$\boldsymbol{A}$为$m\times n$矩阵，$\boldsymbol{A}$的秩为r，则（　　）．

A．$r=m$时，$\boldsymbol{Ax}=0$必有非零解　　B．$r=n$时，$\boldsymbol{Ax}=0$必有非零解

C．$r<m$时，$\boldsymbol{Ax}=0$必有非零解　　D．$r<n$时，$\boldsymbol{Ax}=0$必有非零解

4．设4阶矩阵$\boldsymbol{A}$的元素均为3，则r($\boldsymbol{A}$)=（　　）．

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

5．设1为3阶实对称矩阵$\boldsymbol{A}$的2重特征值，则$\boldsymbol{A}$的属于1的线性无关的特征向量个数为（　　）．

A．0　　B．1　　C．2　　D．3

二、填空题（本大题共 10 小题，每小题 2 分，共 20 分）

6．设$\boldsymbol{A}$为2阶矩阵，将$\boldsymbol{A}$的第1行加到第2行得到$\boldsymbol{B}$，若$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$，则$\boldsymbol{A}$=__________.

7．设$\boldsymbol{A}$为3阶矩阵，且$|\boldsymbol{A}|=2$，则$|2\boldsymbol{A}|$=__________.

8．若向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=(2,1,a)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(4,a,4)^{\mathrm{T}}$，线性无关，则数$a$的取值必满足__________.

9．设向量 $\boldsymbol{\alpha}=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}=(3,5,1)^{\mathrm{T}}$，则 $\boldsymbol{\beta}-2\boldsymbol{\alpha}=$__________.

10．设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$，若非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有解，则增广矩阵 $\overline{\boldsymbol{A}}$ 的行列式 $\left|\overline{\boldsymbol{A}}\right|=$__________.

11．齐次线性方程组 $x_1+x_2+x_3=0$ 的基础解系中所含解向量的个数为__________.

12．设向量 $\boldsymbol{\alpha}=(3,-4)^{\mathrm{T}}$，则 $\boldsymbol{\alpha}$ 的长度 $\|\boldsymbol{\alpha}\|=$__________.

13．已知-2 是矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & x \end{pmatrix}$ 的特征值，则数 $x=$__________.

14．已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 与对角矩阵 $\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ 相似，则数 $a=$__________.

15．已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+tx_3^2$ 正定，则实数 t 的取值范围是__________.

三、计算题（本大题共 7 小题，每小题 9 分，共 63 分）

16．计算行列式 $D=\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-a-c & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$.

17．已知向量 $\boldsymbol{\alpha}=(1,2,k)$，$\boldsymbol{\beta}=(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3})$，且 $\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}=3$，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}$，求

（1）数 k 的值；（2）$\boldsymbol{A}^{10}$.

18．已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，求矩阵 $\boldsymbol{X}$，使得 $\boldsymbol{XA}=\boldsymbol{B}$.

19．求向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,2,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,-1,-2,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(-3,4,-4,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(-6,14,-6,3)^{\mathrm{T}}$ 的秩和一个极大线性无关组，并将向量组中的其余向量由该极大线性无关组线性表出.

20．已知齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=0$ 的一个基础解系为 $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，求 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})$及该齐次线性方程组.

21．设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,-1,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,0,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,-1,2,0)^{\mathrm{T}}$．求一个非零向量 $\boldsymbol{\alpha}_4$，使得 $\boldsymbol{\alpha}_4$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 均正交.

22．用配方法化二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2-2x_2^2-4x_1x_3+8x_2x_3$ 为标准形，并写出所用的可逆性变换.

四、证明题（本大题共 7 分）

23．设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，证明齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=0$ 与 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}=0$ 同解.

全国2014年4月高等教育自学考试线性代数（经管类）试题

一、单项选择题（本大题共5小题，每小题2分，共10分）

1．设行列式$\begin{vmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22}\end{vmatrix}=3$，则行列式$\begin{vmatrix}\alpha_{11} & 2\alpha_{12}+5\alpha_{11}\\ \alpha_{21} & 2\alpha_{22}+5\alpha_{21}\end{vmatrix}=$（　　）．

A．-15　　B．-6　　C．6　　D．15

2．设$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$为4阶非零矩阵，且$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，若$r(\boldsymbol{A})=3$，则$r(\boldsymbol{B})=$（　　）．

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

3．设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=(1，0，0)^T$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(0，1，0)^T$，则下列向量中可由$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$线性表出的是（　　）．

A．$(0，-1，2)^T$　　B．$(-1，2，0)^T$　　C．$(-1，0，2)^T$　　D．$(1，2，-1)^T$

4．设$\boldsymbol{A}$为3阶矩阵，且$r(\boldsymbol{A})=2$，若$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$为齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=0$的两个不同的解．k为任意常数，则方程组$\boldsymbol{Ax}=0$的通解为（　　）．

A．$k\boldsymbol{\alpha}_1$　　B．$k\boldsymbol{\alpha}_2$　　C．$k\dfrac{\alpha_1+\alpha_2}{2}$　　D．$k\dfrac{\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2}{2}$

5．二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+x_3^2-2x_1x_2+4x_1x_3-2x_2x_3$的矩阵是（　　）．

A．$\begin{pmatrix}1 & -2 & 4\\ -2 & 2 & -2\\ 4 & -2 & 1\end{pmatrix}$　B．$\begin{pmatrix}1 & -2 & 4\\ 0 & 2 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$　C．$\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ -1 & 2 & -1\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix}$　D．$\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & 2 & -1\\ -1 & -1 & 1\end{pmatrix}$

二、填空题（本大题共10小题，每小题2分，共20分）

6．3阶行列式$\begin{vmatrix}2 & 3 & 4\\ 1 & 5 & 2\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}$第2行元素的代数余子式之和$\boldsymbol{A}_{21}+\boldsymbol{A}_{22}+\boldsymbol{A}_{23}=$________．

7．设$\boldsymbol{A}$为3阶矩阵，且$|\boldsymbol{A}|=2$，则$|\boldsymbol{A}^*|=$________．

8．设矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}3 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$，则$\boldsymbol{AB}^T=$________．

9．设$\boldsymbol{A}$为2阶矩阵，且$|\boldsymbol{A}|=\dfrac{1}{3}$，则$|(-3\boldsymbol{A})^{-1}|=$________．

10．若向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-2,2)^T$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,0,1)^T$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(3,k,3)^T$线性相关，则数$k=$________．

11．与向量(3,-4)正交的一个单位向量为________．

12．齐次线性方程组$\begin{cases}2x_1+x_2+3x_3=0\\ 2x_1+x_2-3x_3=0\end{cases}$的基础解系所含解向量个数为________．

13．设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 2，$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$ 为非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的两个不同解，则方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解为________.

14．设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵，且满足$|\boldsymbol{E}+2\boldsymbol{A}|=0$，则 $\boldsymbol{A}$ 必有一个特征值为________.

15．二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_1x_2+x_2^2+x_3^2$ 的正惯性指数为________.

三、计算题（本大题共 7 小题，每小题 9 分，共 63 分）

16．计算行列式 $\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix}1&3&2&4\\4&1&3&2\\2&4&1&3\\3&2&4&1\end{vmatrix}$的值.

17．设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{11}-3a_{31}&a_{12}-3a_{32}&a_{13}-3a_{33}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$，求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{PA}=\boldsymbol{B}$.

18．设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&2\\2&2&3\\4&3&3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&1\\-1&2&2\end{pmatrix}$，矩阵 $\boldsymbol{X}$ 满足 $\boldsymbol{XA}=\boldsymbol{B}$，求 $\boldsymbol{X}$.

19．求向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,2,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,1,2)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(0,2,0,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(-1,0,-3,-1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_5=(4,-1,5,7)^{\mathrm{T}}$ 的秩和一个极大线性无关组，并将其余向量由该极大线性无关组线性表出.

20．求线性方程组$\begin{cases}x_1+x_3+2x_4=-1\\2x_1+x_2+3x_3+x_4=-4\\x_1+2x_2+3x_3-4x_4=-5\\-x_1-x_2-2x_3+x_4=3\end{cases}$的通解.

21．已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&1\\0&1&a\end{pmatrix}$的一个特征值为 1，求数 a，并求正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 和对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$，使得 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{AQ}=\boldsymbol{\Lambda}$.

22．用配方法化二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+3x_2^2-2x_3^2+4x_1x_2+2x_2x_3$ 为标准形，并写出所作可逆线性变换.

四、证明题（本大题共 7 分）

23. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 为齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=0$ 的一个基础解系，证明 $2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3$ 也是该方程组的基础解系.

全国2014年7月高等教育自学考试线性代数（经管类）试题

一、单项选择题（本大题共10小题，每小题2分，共20分）

1．3阶行列式$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$的值为（　　）．

A．-1　　B．0　　C．1　　D．2

2．设矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，则$\boldsymbol{A}^3$等于（　　）．

A．$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$　　B．$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$　　C．$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$　　D．$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

3．设$\boldsymbol{A}$是4阶方阵，且$|\boldsymbol{A}|=1$，则$|2\boldsymbol{A}|$等于（　　）．

A．2　　B．4　　C．8　　D．16

4．下列说法错误的是（　　）．

A．两个同阶方阵秩相等，则它们等价

B．两个同阶方阵等价，则它们的秩相等

C．两个同阶方阵相似，则它们一定等价

D．两个同阶方阵等价，则它们一定相似

5．设$\boldsymbol{\alpha}=(1,1,0)$，$\boldsymbol{\beta}=(0,1,1)$，$\boldsymbol{\gamma}=(1,0,1)$，则（　　）．

A．$\boldsymbol{\alpha},\ \boldsymbol{\beta},\ \boldsymbol{\gamma}$线性相关　　B．$\boldsymbol{\alpha},\ \boldsymbol{\beta},\ \boldsymbol{\gamma}$的秩等于1

C．$\boldsymbol{\alpha},\ \boldsymbol{\beta},\ \boldsymbol{\gamma}$线性无关　　D．$\boldsymbol{\alpha},\ \boldsymbol{\beta},\ \boldsymbol{\gamma}$的秩等于2

6．设$\boldsymbol{A}$为3×4矩阵，且$\boldsymbol{A}$的秩$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=1$，则齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=0$的基础解系所含解向量个数为（　　）．

A．4　　B．3　　C．2　　D．1

7．若$|5\boldsymbol{E}_n+\boldsymbol{A}|=0$，则$\boldsymbol{A}$一定有特征值（　　）．

A．-5　　B．$-\frac{1}{5}$　　C．$\frac{1}{5}$　　D．5

8．若向量$\boldsymbol{\alpha}=\left(\frac{1}{3}k,\ \ k-1,\ \ k\right)$与向量$(1,\ 1,\ 0)$正交，则$k=$（　　）．

A．-1　　B．0　　C．$\frac{3}{4}$　　D．$\frac{4}{3}$

9．设$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$是非齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的解，则（　　）．

A．$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$也是$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的解

B．$\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2$也是$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的解

C．$\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2$是对应的齐次线性方程组的解

D．$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$也是$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的解

10．二次型$f(x,y)=x^2-6xy+y^2$对应的对称矩阵为（　　）．

A．$\begin{pmatrix}1 & -6\\ -6 & 1\end{pmatrix}$　B．$\begin{pmatrix}1 & -3\\ -3 & 1\end{pmatrix}$　C．$\begin{pmatrix}1 & 0\\ -6 & 1\end{pmatrix}$　D．$\begin{pmatrix}1 & -6\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

二、填空题（本大题共 10 小题，每小题 2 分，共 20 分）

11．若 3 阶行列式$\begin{vmatrix}1 & 6 & 8\\ 0 & k & 2\\ 0 & 2 & k\end{vmatrix}=0$且$k>0$，则参数$k=$____________．

12．若矩阵$\begin{pmatrix}0 & a\\ 12 & 0\end{pmatrix}$为实反对称矩阵，则$a=$____________．

13．若$\boldsymbol{A}$为n阶方阵，$|\boldsymbol{A}|=3$，且$\boldsymbol{A}^*$为$\boldsymbol{A}$的伴随矩阵，则$\boldsymbol{AA}^*=$____________．

14．矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 2 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$的等价标准形为____________．

15．若向量$\boldsymbol{\alpha}=(1,\ 2,\ 3)$与向量$\left(\frac{1}{2},\ b,\ \frac{3}{2}\right)$线性相关，则$\boldsymbol{b}=$____________．

16．三元齐次线性方程组$x_1+x_2+x_3=0$的通解是____________．

17．若 $\boldsymbol{A}$ 是$m\times n$矩阵，且齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}$=0 只有零解，则 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $r(\boldsymbol{A})$=____________．

18．设$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 0 & 5\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}$的一个特征值为 2，则$\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}$的另一个特征值为____________．

19．设向量$\boldsymbol{\alpha}=(1,\ 3,\ 3)$，则$\boldsymbol{\alpha}$的长度$\|\boldsymbol{\alpha}\|=$____________．

20．若$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & \boldsymbol{a}\end{pmatrix}$为正定矩阵，则实数$a$的取值范围为____________．

三、计算题（本大题共 6 小题，每小题 9 分，共 54 分）

21．计算 4 阶行列式$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

22．求 3 阶方阵$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$的逆矩阵.

23．求向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=(-1,\ 2,\ 0,\ 1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,\ 2,\ 0,\ 5)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(3,\ 2,\ 2,\ 0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(0,\ 4,\ 0,\ 6)^{\mathrm{T}}$，的秩和一个极大线性无关组.

24．当参数 a，b 满足什么条件时，线性方程组$\begin{cases} x_1+x_2+2x_3=1 \\ x_1+x_3=a \\ 2x_1+x_2+3x_3=b \end{cases}$一定有解.

25．已知矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & x \end{pmatrix}$与$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$相似，求参数 x 与 y 的值.

26．求二次型$f(x_1,\ x_2,\ x_3)=x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1$的矩阵，并用配方法求二次型的标准型.

四、证明题（本大题共 6 分）

27．设向量$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_4$线性无关，证明：向量$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\beta}_4=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4$也线性无关.

全国2014年10月高等教育自学考试线性代数（经管类）试题

一、单项选择题（本大题共 5 小题，每小题 2 分，共 10 分）

1．设 3 阶行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=2$，若元素 a_{ij} 的代数余子式为 $\boldsymbol{A}_{ij}\ (i,j=1,2,3)$，则 $\boldsymbol{A}_{31}+\boldsymbol{A}_{32}+\boldsymbol{A}_{33}=$（　　）.

A．-1　　B．0　　C．1　　D．2

2．设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵，将 $\boldsymbol{A}$ 的第 3 行乘以 $-\dfrac{1}{2}$ 得到单位矩阵 $\boldsymbol{E}$，则 $|\boldsymbol{A}|=$（　　）.

A．-2　　B．$-\dfrac{1}{2}$　　C．$\dfrac{1}{2}$　　D．2

3．设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 的秩为 2，则 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 中（　　）.

A．必有一个零向量

B．任意两个向量都线性无关

C．存在一个向量可由其余向量线性表出

D．每个向量均可由其余向量线性表出

4．设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$，则下列向量中是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 -2 的特征向量为（　　）.

A．$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$　　B．$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$　　C．$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$　　D．$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

5．二次型 $f(x_1,\ x_2,\ x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+4x_1x_2$ 正惯性指数为（　　）.

A．0　　B．1　　C．2　　D．3

二、填空题（本大题共 10 小题，每小题 2 分，共 20 分）

6．设 $f(x)=\begin{vmatrix} 2-x & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$，则方程 $f(x)=0$ 的根是 ________.

7．设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}^*=$ ________.

8．设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵，$|\boldsymbol{A}|=-\dfrac{1}{2}$，则行列式 $\left|(2\boldsymbol{A})^{-1}\right|=$________.

9．设矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}$，若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{PA}=\boldsymbol{B}$，则 $\boldsymbol{A}=$________.

10．设向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=(-1,4)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,2)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(4,2)^{\mathrm{T}}$，则 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 由 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表出的表示式为________.

11．设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(3,1,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(4,1,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,0,k)^{\mathrm{T}}$ 线性相关，则 $k=$________.

12．3 元齐次线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_2=0\\x_2-x_3=0\end{cases}$ 的基础解系中所含解向量的个数为________.

13．设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $|3\boldsymbol{E}+2\boldsymbol{A}|=0$，则 $\boldsymbol{A}$ 必有一个特征值为________.

14．设 2 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为的特征值分别为-1 和 1，则 $\boldsymbol{A}^2=$________.

15．设二次型 $f(x_1,x_2)=tx_1^2+x_2^2+2tx_1x_2$ 正定，则实数 t 的取值范围是________.

三、计算题（本大题共 7 小题，每小题 9 分，共 63 分）

16．计算 4 阶行列式 $D=\begin{vmatrix}3&1&0&0\\1&3&1&0\\0&1&3&1\\0&0&1&3\end{vmatrix}$ 的值.

17．已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a^3&a^2&a&1\\a^2&a&1&0\\a&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

18．设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$，且矩阵 $\boldsymbol{X}$ 满足 $\boldsymbol{AX}+\boldsymbol{E}=\boldsymbol{A}^3+\boldsymbol{X}$，求 $\boldsymbol{X}$.

19．设向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,2,1,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(k+1,1,k,k+1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}=(k^2+1,1,1,1)^{\mathrm{T}}$，试确定 k 取何值时 $\boldsymbol{\beta}$ 能由 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出，并写出表示式.

20．求线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=0\\x_2+2x_3+2x_4=1\\x_1+2x_2+3x_3+3x_4=1\end{cases}$ 的通解（要求用其一个特解和导出组的基础解系表示）.

21．设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ x & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 与对角矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 相似，求数 x 与可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$.

22．用正交变换将二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+x_3^2+2x_1x_3$ 化为标准形，并写出标准形和所作正交变换.

四、证明题（本大题共 7 分）

23．设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关，且其中任意两个向量都线性无关．证明：存在全不为零的常数 k_1,k_2,k_3 使得 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3=0$.

全国2015年4月高等教育自学考试线性代数（经管类）试题

一、单项选择题（本大题共5小题，每小题2分，共10分）

1．设行列式$D_1=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$，$D_2=\begin{vmatrix} a_1 & 2b_1-3a_1 \\ a_2 & 2b_2-3a_2 \end{vmatrix}$，则$D_2$=（　　）．

A．$-D_1$　　B．D_1　　C．$2D_1$　　D．$3D_1$

2．若$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & y \end{pmatrix}$，且$2\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$，则（　　）．

A．$x=1$，$y=2$　　B．$x=2$，$y=1$

C．$x=1$，$y=1$　　D．$x=2$，$y=2$

3．已知$\boldsymbol{A}$是3阶可逆矩阵，则下列矩阵中与$\boldsymbol{A}$等价的是（　　）．

A．$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$　　B．$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$　　C．$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　　D．$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

4．设3阶实对称矩阵$\boldsymbol{A}$的全部特征值为1，-1，-1，则齐次线性方程组$(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})x=0$的基础解系所含解向量的个数为（　　）．

A．0　　B．1　　C．2　　D．3

5．矩阵$\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$有一个特征值为（　　）．

A．-3　　B．-2　　C．1　　D．2

二、填空题（本大题共10小题，每小题2分，共20分）

6．设$\boldsymbol{A}$为3阶矩阵，且$|A|=3$，则$|3A^{-1}|$=________．

7．设$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$，则$\boldsymbol{A}^*$=________．

8．已知$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$，若矩阵$\boldsymbol{X}$满足$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$，则$\boldsymbol{X}$=________．

9．若向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(k-1,4,2)^{\mathrm{T}}$线性相关，则$k$=________．

10．若齐次线性方程组$\begin{cases} x_1+2x_2+ax_3=0 \\ 2x_1-x_2+x_3=0 \\ 3x_1+x_2-x_3=0 \end{cases}$有非零解，则数$a$=________．

11．设向量$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-2,2)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,0,-1)^{\mathrm{T}}$，则内积$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)$=________．

12．向量空间$\boldsymbol{V}=\{x=(x_1,x_2,0)^{\mathrm{T}}|x_1,x_2\in R\}$的维数为________．

13．与向量$(1,0,1)^{\mathrm{T}}$和$(1,1,0)^{\mathrm{T}}$均正交的一个单位向量为________.

14．矩阵$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}$的两个特征值之积为________.

15．若实二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+ax_2^2+a^2x_3^2+2x_1x_2$正定，则数 a 的取值范围是________.

三、计算题（本大题共7小题，每小题9分，共63分）

16．计算行列式$D=\begin{vmatrix}2 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 3 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 4 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 5\end{vmatrix}$的值.

17．设2阶矩阵$\boldsymbol{A}$的行列式$|\boldsymbol{A}|=\dfrac{1}{2}$，求行列式$|(2\boldsymbol{A})^{-1}+2\boldsymbol{A}^*|$的值.

18．设矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 1\\ -1 & 0 & -1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 0\\ 5 & -3\end{pmatrix}$，矩阵$\boldsymbol{X}$满足$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{AX}+\boldsymbol{B}$，求$\boldsymbol{X}$.

19．求向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,5,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(-1,3,-6)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(3,-1,10)^{\mathrm{T}}$的秩和一个极大线性无关组，并将向量组中的其余向量由该极大线性无关组线性表出.

20．利用克拉默法则解线性方程组$\begin{cases}x_1+ax_2+a^2x_3=3a^2\\ x_1+bx_2+b^2x_3=3b^2\\ x_1+cx_2+c^2x_3=3c^2\end{cases}$，其中$a,b,c$两两互不相同.

21．已知矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & a & 1\\ a & 3 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$与$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & b\end{pmatrix}$相似，求数$a,b$的值.

22．用正交变换化二次型$f(x_1,x_2)=5x_1^2+5x_2^2+4x_1x_2$为标准型，并写出所作的正交变换.

四、证明题（本题7分）

23．设$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$均为n阶矩阵，且$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{B}$，证明$\boldsymbol{A}$可逆.

全国2015年10月高等教育自学考试线性代数（经管类）试题

一、单项选择题（本大题共5小题，每小题2分，共10分）

1．已知2阶行列式$\begin{vmatrix} a_1+a_2 & -2a_2 \\ b_1+b_2 & -2b_2 \end{vmatrix}=2$，则$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}=$（　　）.

A．-2　　B．-1　　C．1　　D．2

2．设$\boldsymbol{A}^*=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$，则$\boldsymbol{A}^{-1}=$（　　）.

A．$\begin{pmatrix} 0 & 1/3 \\ -1/2 & 0 \end{pmatrix}$　　B．$\begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ 1/3 & 0 \end{pmatrix}$

C．$\begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ -1/3 & 0 \end{pmatrix}$　　D．$\begin{pmatrix} 0 & -1/3 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$

3．设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_s$可由向量组$\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，…，$\boldsymbol{\beta}_t$线性表出，则下列结论中正确的是（　　）.

A．若$s\le t$，则$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_s$必线性相关

B．若$s\le t$，则$\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，…，$\boldsymbol{\beta}_t$必线性相关

C．若$\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，…，$\boldsymbol{\beta}_t$线性无关，则$s\le t$

D．若$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_s$线性无关，则$s\le t$

4．设有非齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$，其中$\boldsymbol{A}$为$m\times n$矩阵，且$r(\boldsymbol{A})=r_1$，$r(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{b})=r_2$，则下列结论中正确的是（　　）.

A．若$r_1=m$，则$\boldsymbol{Ax}=0$有非零解　　B．若$r_1=n$，则$\boldsymbol{Ax}=0$仅有零解

C．若$r_2=m$，则$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$有无穷多解　　D．若$r_2=n$，则$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$有唯一解

5．设n阶矩阵$\boldsymbol{A}$满足$|2\boldsymbol{E}-3\boldsymbol{A}|=0$，则$\boldsymbol{A}$必有一个特征值$\lambda=$（　　）.

A．$-\dfrac{3}{2}$　　B．$-\dfrac{2}{3}$　　C．$\dfrac{2}{3}$　　D．$\dfrac{3}{2}$

二、填空题（本大题共10小题，每小题2分，共20分）

6．设行列式$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$中元素$a_{ij}$的代数余子式为$A_{ij}(i,j=1,2)$，则$a_{11}A_{21}+a_{12}A_{22}=$__________.

7．已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}=$___________.

8．设矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$，若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$，则 $\boldsymbol{A}=$________.

9．设向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,0)^{\mathrm T}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,0)^{\mathrm T}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,1,1)^{\mathrm T}$，$\boldsymbol{\beta}=(2,1,3)^{\mathrm T}$，则 $\boldsymbol{\beta}$ 由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出的表示式为 $\boldsymbol{\beta}=$____________.

10．设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,1)^{\mathrm T}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,1,0)^{\mathrm T}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(0,2,k)^{\mathrm T}$ 线性无关，则数 k 的取值应满足__________.

11．设 3 元非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的增广矩阵$(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{b})$经初等行变换可化为

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 3 & \vdots & -1\\ 0 & 1 & -1 & \vdots & 2\\ 0 & 0 & (k-1)(k+2) & \vdots & k-1\end{pmatrix}$$

若该方程组无解，则 $k=$_________.

12．设 $\lambda_0=-2$ 是 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值，则矩阵 $\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}$ 必有一个特征值是________.

13．设 2 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，其中 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & -3\\ -2 & 1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & a\end{pmatrix}$，则 $a=$_______.

14．设向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,0)^{\mathrm T}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(4,0,1)^{\mathrm T}$，则 $\boldsymbol{\alpha}_2-\dfrac{(\boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_1)}{(\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_1)}\boldsymbol{\alpha}_1=$__________.

15．二次型 $f(x_1,\ x_2)=-2x_1^2+x_2^2+4x_1x_2$ 的规范形为__________.

三、计算题（本大题共 7 小题，每小题 9 分，共 63 分）

16．计算行列式 $\begin{vmatrix}1 & 2^2 & 3^2 & 4^2\\ 2^2 & 3^2 & 4^2 & 5^2\\ 3^2 & 4^2 & 5^2 & 6^2\\ 4^2 & 5^2 & 6^2 & 7^2\end{vmatrix}$ 的值.

17．已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4 & 2 & 1\\ 2 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}$，若矩阵 $\boldsymbol{X}$ 满足等式 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{X}$，求 $\boldsymbol{X}$.

18．已知矩阵 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 满足关系式 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$，其中 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & r & s\\ 0 & 1 & t\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$，计算

（1）$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2$ 与 $\boldsymbol{A}^3$;

（2）$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2)$.

19．求向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,2,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,2,2)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(0,2,1,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(1,0,3,1)^{\mathrm{T}}$ 的秩和一个极大线性无关组，并将向量组中的其余向量由该极大线性无关组线性表出.

20．设 3 元线性方程组 $\begin{cases} x_1+2x_3=1 \\ -x_1+x_2-x_3=-2 \\ 2x_1-x_2+(a+2)x_3=3 \\ x_1+x_2+3x_3=b \end{cases}$，问数 a，b 分别为何值时，方程组有无穷多解？并求出其通解(要求用其一个特解和导出组的基础解系表示).

21．设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值和特征向量.

22．用配方法化二次型 $f(x_1, x_2, x_3)=x_1^2-x_1x_2+x_2x_3$ 为标准形，并写出所作的可逆线性变换.

四、证明题（本题 7 分）

23．设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 的秩为 2，且 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表出，证明 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$ 是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 的一个极大线性无关组.

全国2016年4月高等教育自学考试线性代数（经管类）试题

一、单项选择题（本大题共5小题，每小题2分，共10分）

1．多项式 $f(x)=\begin{vmatrix} x & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \\ -2 & 5 & 4 \end{vmatrix}$ 的常数项是（　　）.

A. -14　　B. -7　　C. 7　　D. 14

2．设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵，如果 $\boldsymbol{A}=\frac{1}{2}\boldsymbol{E}$，则 $|\boldsymbol{A}|=$（　　）.

A. $\frac{1}{2^n}$　　B. $\frac{1}{2^{n-1}}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. 2

3．设 $\boldsymbol{A}$ 为3阶矩阵，且 $|\boldsymbol{A}|=a\neq 0$，将 $\boldsymbol{A}$ 按列分块为 $\boldsymbol{A}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，若矩阵 $\boldsymbol{B}=(\alpha_1+\alpha_2,2\alpha_2,\alpha_3)$，则 $|\boldsymbol{B}|=$（　　）.

A. 0　　B. a　　C. $2a$　　D. $3a$

4．若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 可由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 线性表出，则必有（　　）.

A. $s\leq t$

B. $s>t$

C. 秩$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)\leq$秩$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t)$

D. 秩$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)>$秩$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t)$

5．与矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 合同的矩阵是（　　）.

A. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　　B. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$　　C. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$　　D. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

二、填空题（本大题共10小题，每小题2分，共20分）

6．行列式 $\begin{vmatrix} 0 & -c & -b \\ c & 0 & -a \\ b & a & 0 \end{vmatrix}=$ __________.

7．若行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & 2a_{12}-3a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & 2a_{22}-3a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & 2a_{23}-3a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}=-2$，则 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}=$ ____________.

8．设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix}$，则 $AB^{T}=$________.

9．设矩阵 $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$，则 $(A-E)^{-1}=$________.

10．设矩阵 $A=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 3 & 0\end{pmatrix}$，则 $A^{*}=$________.

11．设向量 $\beta=(-1,1,k)^{T}$ 可由向量 $\alpha_1=(1,0,-1)^{T}$，$\alpha_2=(1,-2,-1)^{T}$ 线性表示，则 $k=$____________.

12．齐次线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0\\ x_3-x_4=0\end{cases}$ 的基础解系中解向量的个数为________.

13．设 A 为 3 阶矩阵，α_i 为 3 维非零列向量，且满足 $A\alpha_i=i\alpha_i$ $(i=1,2,3)$ 则 $r(A)=$___________.

14．设 $\lambda_0=-2$ 是 n 阶矩阵 A 的一个特征值，则 A^2+E 的一个特征值是__________.

15．二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-2x_1x_3+x_2x_3$ 的矩阵为__________.

三、计算题（本大题共 7 小题，每小题 9 分，共 63 分）

16．计算行列式 $D=\begin{vmatrix}a_2 & 0 & 0 & c_2\\ 0 & a_1 & c_1 & 0\\ 0 & d_1 & b_1 & 0\\ d_2 & 0 & 0 & b_2\end{vmatrix}$.

17．设矩阵 A,B,C，满足关系式 $AC=CB$，其中 $B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$，$C=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & -1 & 0\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}$，求矩阵 A 与 A^3.

18．设 A 为 3 阶矩阵，将 A 的第 1 列与第 2 列互换得到矩阵 B，再将 B 的第 2 列加到第 3 列得到单位矩阵 E，求矩阵 A.

19．求向量组 $\alpha_1=(1,1,2,4)^{T}$，$\alpha_2=(0,1,1,2)^{T}$，$\alpha_3=(2,1,3,6)^{T}$，$\alpha_4=(1,2,3,6)^{T}$ 的一个极大线性无关组，并将向量组中的其余向量由该极大线性无关组线性表出.

20．求线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_2-2x_3=1\\ x_1-2x_2+x_3=1\\ -2x_1+x_2+x_3=-2\end{cases}$ 的通解(要求用其一个特解和导出组的基础解系表出).

21．设 2 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$，求正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$，使得 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}$ 为对角矩阵.

22．若向量 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ k \end{pmatrix}$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的一个特征向量，求 k 的值.

四、证明题（本题 7 分）

23．设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶可逆矩阵，证明 $(2\boldsymbol{A})^{*}=4\boldsymbol{A}^{*}$.

全国2016年10月高等教育自学考试线性代数（经管类）试题

一、单项选择题（本大题共5小题，每小题2分，共10分）

1．已知二阶行列式$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}=2$，则$\begin{vmatrix} -a_1+a_2 & 2a_2 \\ -b_1+b_2 & 2b_2 \end{vmatrix}=$（　　）．

A．-4　　B．-2　　C．2　　D．4

2．设$\boldsymbol{A}^*=\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$，则$\boldsymbol{A}^{-1}=$（　　）．

A．$\begin{pmatrix} -1/2 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}$　　B．$\begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}$

C．$\begin{pmatrix} -1/3 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$　　D．$\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1/3 \end{pmatrix}$

3．设n阶矩阵$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$满足$\boldsymbol{ABC}=\boldsymbol{E}$，则（　　）．

A．$\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{BC}$　　B．$\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{CB}$　　C．$\boldsymbol{B}^{-1}=\boldsymbol{CA}$　　D．$\boldsymbol{B}^{-1}=\boldsymbol{AC}$

4．若向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$可由向量组$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$线性表出，下列结论中正确的是（　　）．

A．若$s>t$，则$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性相关　　B．若$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$线性无关，则$s>t$

C．若$s>t$，则$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$线性相关　　D．若$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性无关，则$s>t$

5．设3元线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$，已知$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=2$，其两个解$\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2$满足$\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\eta}_2=(-1,0,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2=(-3,2,-1)^{\mathrm{T}}$，$k$为任意常数，则方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的通解为

A．$\frac{1}{2}(-1,0,1)^{\mathrm{T}}+k(-3,2,-1)^{\mathrm{T}}$　　B．$\frac{1}{2}(-3,2,-1)^{\mathrm{T}}+k(-1,0,1)^{\mathrm{T}}$

C．$(-1,0,1)^{\mathrm{T}}+k(-3,2,-1)^{\mathrm{T}}$　　D．$(-3,2,-1)^{\mathrm{T}}+k(-1,0,1)^{\mathrm{T}}$

二、填空题（本大题共10小题，每小题2分，共20分）

6．设$f(x)=\begin{vmatrix} 0 & x & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}=a_1x+a_0$，则$a_0=$__________．

7．2阶行列式$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$第2行元素的代数余子式之和为___________．

8．设矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}$，则$\boldsymbol{C}^2=$________．

9. 设 A 为 2 阶矩阵, 若存在矩阵 $P=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$, 使得 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$, 则 $A=$________.

10．设向量 $\alpha_1=(1,1,-1)^T$，$\alpha_2=(1,-1,1)^T$，$\alpha_3=(-1,1,1)^T$，$\beta=(1,0,0)^T$，则 β 由向量组 α_1，α_2，α_3 的线性表出的表示式为________.

11．设向量组 $\alpha_1=(-2,1,3)^T$，$\alpha_2=(1,0,-1)^T$，$\alpha_3=(k+2,1,0)^T$ 线性相关，则 $k=$____________.

12．设向量 $\alpha_1=(1,-1,2)^T$ 与 $\alpha_2=(4,0,k)^T$ 正交，则 $k=$_________.

13．设 3 元非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的增广矩阵 $\overline{A}$ 经初等行变换化为

$$\overline{A}\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&-3&1\\0&1&1&2\\0&0&(k+2)(k-1)&k-1\end{array}\right)$$

若方程组有无穷多解则 $k=$___________.

14．矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&-3\\1&-2\end{pmatrix}$ 的两个特征值之和等于__________.

15．二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=-x_1^2-x_2^2+2x_1x_2$ 的规范型为__________.

三、计算题（本大题共 7 小题，每小题 9 分，共 63 分）

16．计算行列式 $D=\begin{vmatrix}a_1-b_1&a_1-b_2&a_1-b_3\\a_2-b_1&a_2-b_2&a_2-b_3\\a_3-b_1&a_3-b_2&a_3-b_3\end{vmatrix}$.

17．设矩阵 $A=\begin{pmatrix}3&2&1\\2&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$，求 A^* 与 A^{-1}.

18．设 A 为 3 阶矩阵，将 A 的第 1 行的 2 倍加到第 3 行得到矩阵 B，再将 B 的第 2 列与第 3 列得到单位矩阵 E，求矩阵 A.

19．求向量组 $\alpha_1=(1,2,3,-1)^T$，$\alpha_2=(2,3,4,-3)^T$，$\alpha_3=(0,0,1,2)^T$，$\alpha_4=(3,4,3,-9)^T$，$\alpha_5=(1,1,2,0)^T$ 的秩和一个极大线性无关组，并将向量组中的其余向量由该极大线性无关组线性表出.

20．求线性方程组 $\begin{cases}x_1-x_2-3x_4=-2\\x_1+2x_3-2x_4=-1\\2x_1-2x_2+x_3-6x_4=-5\\-x_1+2x_2+3x_3+4x_4=2\end{cases}$ 的通解(要求用其一个特解和导出组的基础解系表示).

21．设 A 为 3 阶实对称矩阵，已知 $r(A)=2$，$\alpha_1=(1,0,-1)^T$，$\alpha_2=(1,0,1)^T$ 分别是 A

的属于特征值

$\lambda_1=-1,\ \lambda_2=1$的特征向量，求$\boldsymbol{A}$的另一个特征值和对应的特征向量.

22．求正交变换$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$，将二次型$f(x_1,\ x_2)=x_1^2+x_2^2-2x_1x_2$化为标准型.

四、证明题（本题 7 分）

23．设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$是齐次线性方程组$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=0$的一个基础解系，证明$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\beta}_2=2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$也是方程组$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=0$的一个基础解系.

全国2017年4月高等教育自学考试线性代数（经管类）试题

一、单项选择题（本大题共5小题，每小题2分，共10分）

1．已知2阶行列式$\begin{vmatrix} -3a_2 & a_1+2a_2 \\ -3b_2 & b_1+2b_2 \end{vmatrix}=6$，则$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}=$（　　）.

A．-6　　B．-2　　C．2　　D．6

2. 若矩阵$\boldsymbol{A}$中有一个$r+1$阶子式等于零, 且所有r阶子式都不为零, 则必有（　　）.

A．$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=r$　　B．$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})\geq r$　　C．$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})<r$　　D．$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=r+1$

3．设向量组$\boldsymbol{\alpha}=(1,0,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}=(0,1,0)^{\mathrm{T}}$，下列向量中可以表为$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$线性组合是（　　）.

A．$(2,1,0)^{\mathrm{T}}$　　B．$(2,1,1)^{\mathrm{T}}$

C．$(2,0,1)^{\mathrm{T}}$　　D．$(0,1,1)^{\mathrm{T}}$

4．设线性方程组$\begin{cases} 2x_1+x_2+x_3=0 \\ kx_1+x_2+x_3=0 \\ x_1-x_2+x_3=0 \end{cases}$有非零解，则$k$的值为（　　）.

A．-2　　B．-1　　C．1　　D．2

5．设$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & \boldsymbol{x} & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，且$\boldsymbol{A}$的特征值为1, 2, 3，则$x$=（　　）.

A．-2　　B．2　　C．3　　D．4

二、填空题（本大题共10小题，每小题2分，共20分）

6．行列式$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & 7 \end{vmatrix}=$ __________.

7．设$\begin{vmatrix} -1 & 0 & x \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=a_1x+a_0$，则$a_1=$___________.

8．设$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$均为3阶矩阵，且$|\boldsymbol{A}|=2, |\boldsymbol{B}|=-3$, 则$|3\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}^{-1}|=$________.

9．设$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$均为2阶可逆矩阵，则$\begin{pmatrix} 3\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix}^{-1}=$________.

10．向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,0)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(3,0,-9)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(1,2,3)^{\mathrm{T}}$的秩为________.

11．设 3 元非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 满足 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=2, \boldsymbol{\alpha}_1=(-1,2,0)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_2=(1,3,1)^{\mathrm{T}}$ 为其两个解，则其导出组 $\boldsymbol{Ax}=0$ 的通解为__________.

12．设线性方程组 $\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3=a \\ \quad\quad x_2-x_3=b \\ x_1 \quad\quad +x_3=c \end{cases}$ 有解，则数 a,b,c 应满足__________.

13．设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $1,-2,3$，则 $|\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{E}|$__________.

14．若 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $|3\boldsymbol{E}+2\boldsymbol{A}|=0$，则 $\boldsymbol{A}$ 必有一个特征值为__________.

15．二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2+x_2x_3$ 的矩阵为__________.

三、计算题（本大题共 7 小题，每小题 9 分，共 63 分）

16．计算行列式 $\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix}$.

17．设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$,求 $\boldsymbol{A}^2-3\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$.

18．设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{B}$,其中 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$，求矩阵 $\boldsymbol{B}$.

19．求向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,1,4)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_2=(0,3,-1,-3)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_3=(1,-2,8,8)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_4=(2,3,8,9)^{\mathrm{T}}$ 的一个极大线性无关组，并将向量组中的其余向量由该极大线性无关组线性表出.

20．求线性方程组 $\begin{cases} -x_1-4x_2+\quad x_3=1 \\ \quad\quad kx_2-\ 3x_3=3 \\ x_1+3x_2+(k+1)x_3=0 \end{cases}$

确定 k 取何值时，方程组有惟一解、无解、有无穷多解，并在有无穷多解时求出其通解(要求用其一个特解和导出组的基础解系表出).

21．已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & x \end{pmatrix}$ 与 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ 相似，求：

（1）常数 x,y 的值；

（2）可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$.

22．求正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Qy}$，将二次型 $f(x_1,x_2)=5x_1^2-4x_1x_2+5x_2^2$ 化为标准形.

四、证明题（本题 7 分）

23．设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$线性无关，向量$\boldsymbol{\beta}_1$可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$线性表出，而$\boldsymbol{\beta}_2$不能由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$线性表出.

证明：向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2$线性无关.

全国2012年1月高等教育自学考试线性代数（经管类）试题参考答案

一、单项选择题（本大题共10小题，每小题2分，共20分）

1．D　2．A　3．D　4．D　5．A　6．B　7．B　8．A　9．B　10．C

二、填空题（本大题共10小题，每小题2分，共20分）

11．-8　12．-3　13．$\boldsymbol{A}^{k-1}$　14．n　15．$n-r$
16．$\mathrm{r}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})$　17．$2b$　18．0　19．1　20．3

三、计算题（本大题共6小题，每小题9分，共54分）

21．解：$\begin{vmatrix}1&1&-1&2\\-1&-1&-4&1\\2&4&-6&1\\1&2&4&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&-1&2\\0&0&-5&3\\0&2&-4&-3\\0&1&5&0\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&1&-1&2\\0&1&5&0\\0&2&-4&-3\\0&0&-5&3\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&1&-1&2\\0&1&5&0\\0&0&-14&-3\\0&0&-5&3\end{vmatrix}$

$=-(-42-15)=57$．

22．解：由条件$\boldsymbol{ABA}^{-1}=4\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{BA}^{-1}$得，$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{BA}^{-1}=4\boldsymbol{A}^{-1}$，从而$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{B}=4\boldsymbol{E}$，

故$\boldsymbol{B}=4(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}=4\begin{pmatrix}1&&\\&2&\\&&4\end{pmatrix}^{-1}=4\begin{pmatrix}1&&\\&1/2&\\&&1/4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&&\\&2&\\&&1\end{pmatrix}$．

23．解：由于$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=\begin{pmatrix}3&0&-1&6\\1&7&2&9\\2&1&0&4\\0&3&1&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&7&2&9\\3&0&-1&6\\2&1&0&4\\0&3&1&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&7&2&9\\0&-21&-7&-21\\0&-13&-4&-14\\0&3&1&3\end{pmatrix}$

$\to\begin{pmatrix}1&7&2&9\\0&3&1&3\\0&-13&-4&-14\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&7&2&9\\0&3&1&3\\0&-1&0&-2\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&7&2&9\\0&1&0&2\\0&0&1&-3\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&2\\0&0&1&-3\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，

故$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$是该向量组的一个极大线性无关组，且可知，$\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2-3\boldsymbol{\alpha}_3$．

24．解：矩阵$\boldsymbol{A}$的特征多项式为：$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda+1&-4&-3\\2&\lambda-5&-3\\-2&4&\lambda+2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda+1&-4&-3\\2&\lambda-5&-3\\0&\lambda-1&\lambda-1\end{vmatrix}$，

$=\lambda(\lambda-1)^2$由$\lambda(\lambda-1)^2=0$，得$\boldsymbol{A}$的特征值为$\lambda_1=0$，$\lambda_2=\lambda_3=1$．

当 $\lambda_1=0$ 时, 齐次线性方程组 $(0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=0$ 所对应的等价方程组为 $\begin{cases}x_1+x_3=0\\x_2+x_3=0\end{cases}$，$x_3$ 为自由未知量,

得其对应的特征向量为 $\boldsymbol{p}_1=(1,1,-1)^{\mathrm{T}}$，故属于 $\lambda_1=0$ 的全部特征向量为：$k_1\boldsymbol{p}_1$，其中 $k_1\neq 0$；

当 $\lambda_2=\lambda_3=1$ 时，齐次线性方程组 $(1\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=0$ 所对应的等价方程组为 $2x_1-4x_2-3x_3=0$,

x_2,x_3 为自由未知量，得其对应的特征向量为 $\boldsymbol{p}_2=(2,1,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{p}_3=(3,0,2)^{\mathrm{T}}$,

故属于 $\lambda_2=\lambda_3=1$ 的全部特征向量为：$k_2\boldsymbol{p}_2+k_3\boldsymbol{p}_3$，其中 k_1,k_2 不全为零.

25．解：对该方程组的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 施行初等行变换

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1&-5\\2&1&0&-3\\1&1&-1&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1&-5\\0&1&-2&7\\0&1&-2&7\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1&-5\\0&1&-2&7\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

对应的同解方程组为 $\begin{cases}x_1+x_3-5x_4=0\\x_2-2x_3+7x_4=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}x_1=-x_3+5x_4\\x_2=2x_3-7x_4\end{cases}$. x_3,x_4 为自由未知量,

分别取 $x_3=1,\ x_4=0$ 和 $x_3=0,\ x_4=1$，可得基础解系 $\boldsymbol{\xi}_1=(-1,\ 2,\ 1,\ 0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\xi}_2=(5,\ -7,\ 0,\ 1)^{\mathrm{T}}$.

于是，原方程组的通解可表示为 $\boldsymbol{\xi}=k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2$，$k_1$ 和 k_2 为任意实数.

26．解：对 $\boldsymbol{A}$ 施行初等行变换将其化为阶梯形矩阵,

$$\boldsymbol{A}\to\begin{pmatrix}1&-1&2&-1&0\\3&0&6&-1&1\\0&3&0&0&1\\1&-1&2&1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&2&-1&0\\0&3&0&2&1\\0&3&0&0&1\\0&0&0&2&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&2&-1&0\\0&3&0&0&1\\0&3&0&0&1\\0&0&0&2&0\end{pmatrix},$$

$$\to\begin{pmatrix}1&-1&2&-1&0\\0&3&0&2&1\\0&0&0&2&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}=\boldsymbol{B}$$

由于 $\boldsymbol{B}$ 的非零行行数为 3，故 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 3.

四、证明题（本题 6 分）

27．证明：设存在一组常数 k_1，k_2，k_3，使得 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3=0$,

即 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\k_3\end{pmatrix}=0$，亦即 $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\k_3\end{pmatrix}=0$，则 $\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\k_3\end{pmatrix}$ 为 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=0$ 的解．又因为 $\boldsymbol{A}$ 的行列式不等于 0,

所以方程组 $\boldsymbol{Ax}=0$ 只有零解，从而 $k_1=k_2=k_3=0$，故 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

全国2012年4月高等教育自学考试线性代数（经管类）试题参考答案

一、单项选择题（本大题共10小题，每小题2分，共20分）

1．D　2．A　3．B　4．C　5．A　6．B　7．A　8．B　9．B　10．D

二、填空题（本大题共10小题，每小题2分，共20分）

11．16　　12．2　　13．$\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$　　14．2　　15．3

16．$\begin{bmatrix}2\\2\\-2\\0\end{bmatrix}+k\begin{bmatrix}0\\0\\-2\\1\end{bmatrix}$，$k\in\mathbf{R}$　　17．6　　18．3　　19．2　　20．$f=y_1^2-4y_2^2$

三、计算题（本大题共6小题，每小题9分，共54分）

21．解：

$$D=\begin{vmatrix}3&5&-1&2\\-4&5&3&-3\\1&2&0&1\\2&0&-3&4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3&-1&-1&-1\\-4&13&3&1\\1&0&0&0\\2&-4&-3&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1&-1&-1\\13&3&1\\-4&-3&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1&0&0\\13&-10&-12\\-4&1&6\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}-10&-12\\1&6\end{vmatrix}=48.$$

22．解：由条件 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{X}=\boldsymbol{XA}$ 得，$\boldsymbol{X}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=\boldsymbol{A}$，又 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}0&-3&0\\2&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，且

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}=\begin{pmatrix}0&\frac{1}{2}&0\\-\frac{1}{3}&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},$$

故 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}=\begin{pmatrix}1&-3&0\\2&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&\frac{1}{2}&0\\-\frac{1}{3}&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&0\\-\frac{1}{3}&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$.

23．解：

$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=|(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3,\boldsymbol{\gamma}_4)+(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3,\boldsymbol{\gamma}_4)|=|(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},2\boldsymbol{\gamma}_2,2\boldsymbol{\gamma}_3,2\boldsymbol{\gamma}_4)|=2^3\bullet|(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3,\boldsymbol{\gamma}_4)|$

$=2^3\bullet|(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3,\boldsymbol{\gamma}_4)+(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3,\boldsymbol{\gamma}_4)|=8(|\boldsymbol{A}|+|\boldsymbol{B}|)=8*(4+1)=40$.

24．解：由于 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=\begin{pmatrix}1&2&0&3\\2&0&-4&-2\\-1&t&5&t+4\\1&0&-2&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&0&3\\0&-4&-4&-8\\0&t+2&5&t+7\\0&-2&-2&-4\end{pmatrix}$

$\to\begin{pmatrix}1&2&0&3\\0&1&1&2\\0&t+2&5&t+7\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&0&3\\0&1&1&2\\0&0&3-t&3-t\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，则可得当 $t=3$ 时，该向量组的秩为 2，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 为其一个极大无关组；

当 $t\neq3$ 时，该向量组的秩为 3，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 为其一个极大无关组.

25．解：对该方程组的增广矩阵($\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{b}$)施行初等行变换

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=\begin{pmatrix}1&1&2&1&3\\1&2&1&-1&2\\2&1&5&4&7\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&2&1&3\\0&1&-1&-2&-1\\0&-1&1&2&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&3&3&4\\0&1&-1&-2&-1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

对应的同解方程组为 $\begin{cases}x_1+3x_3+3x_4=4\\x_2-x_3-2x_4=-1\end{cases}$，即 $\begin{cases}x_1=4-3x_3-3x_4\\x_2=-1+x_3+2x_4\end{cases}$，$x_3,x_4$ 为自由未知量，

令 $x_3=x_4=0$，得方程组的一个特解为 $\boldsymbol{\eta}^*=(4,-1,0,0)^{\mathrm{T}}$. 对应的导出组为 $\begin{cases}x_1=-3x_3-3x_4\\x_2=x_3+2x_4\end{cases}$，

分别取 $x_3=1,\ x_4=0$ 和 $x_3=0,\ x_4=1$，可得基础解系 $\boldsymbol{\xi}_1=(-3,\ 1,\ 1,\ 0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\xi}_2=(-3,\ 2,\ 0,\ 1)^{\mathrm{T}}$.

于是，原方程组的通解可表示为 $\eta=\eta^*+k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2$，$k_1$ 和 k_2 为任意实数.

26．解：法一：设向量 $\boldsymbol{\beta}=(x_1,x_2,x_3)$ 与向量 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 正交，有 $x_1+x_2+x_3=0$，通过直观法可得正交解 $\boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,-1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,y,1)^{\mathrm{T}}$，代入方程得 $y=-2$，故 $\boldsymbol{\alpha}_3=(1,-2,1)^{\mathrm{T}}$.

法二：设向量 $\boldsymbol{\beta}=(x_1,x_2,x_3)$ 与向量 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 正交，则有 $x_1+x_2+x_3=0$，x_2,x_3 为自由未知量，分别取 $x_2=1,\ x_3=0$

和 $x_2=0,\ x_3=1$，可得线性无关的解向量 $\boldsymbol{p}_2=(-1,\ 1,\ 0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{p}_3=(-1,\ 0,\ 1)^{\mathrm{T}}$. 将 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{p}_2$，$\boldsymbol{p}_3$ 进行施密特正交化得，$\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{p}_2=(-1,\ 1,\ 0)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_3=\boldsymbol{p}_3-\dfrac{(\boldsymbol{p}_3,\alpha_1)}{(\alpha_1,\alpha_1)}\alpha_1-\dfrac{(\boldsymbol{p}_3,\alpha_2)}{(\alpha_2,\alpha_2)}\alpha_2$ $=\left(-\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2},1\right)^{\mathrm{T}}$.（注意结果不唯一）

四、证明题（本题 6 分）

27．证明：因为 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵，所以 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 为 n 阶的可逆矩阵，故齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=0$ 只有零解.

显然 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=0\Rightarrow \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=0$；又因为 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 是一个 n 维列向量，所以

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=0\Rightarrow \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=0\Rightarrow(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=0\Rightarrow \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=0,$$

故方程组 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=0$ 与 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=0$ 同解，即 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=0$ 只有零解.

全国 2012 年 7 月高等教育自学考试线性代数（经管类）试题参考答案

一、单项选择题（本大题共 10 小题，每小题 2 分，共 20 分）

1．A　2．B　3．B　4．C　5．C　6．C　7．B　8．B　9．A　10．B

二、填空题（本大题共 10 小题，每小题 2 分，共 20 分）

11．160　12．$\begin{pmatrix}4&2&3\\3&4&1\\1&2&0\end{pmatrix}$　13．$\begin{pmatrix}1&-2&0\\0&1&0\\0&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$　14．11　15．2　16．0

17．-1　18．$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ k_1,k_2 为任意实数　19．$\begin{pmatrix}0&\frac{1}{2}&0&0\\\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}&0\\0&\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\0&0&\frac{1}{2}&5\end{pmatrix}$

20．$x=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

三、计算题（本大题共 6 小题，每小题 9 分，共 54 分）

21．解：$D=\begin{vmatrix}1&1&1&2\\1&1&2&1\\1&2&1&1\\2&1&1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}5&5&5&5\\1&1&2&1\\1&2&1&1\\2&1&1&1\end{vmatrix}=5\cdot\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&1&2&1\\1&2&1&1\\2&1&1&1\end{vmatrix}=5\cdot\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{vmatrix}=-5\cdot\begin{vmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{vmatrix}$

$$=5\cdot\begin{vmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{vmatrix}=5.$$

22. 解：由条件 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{AX}+\boldsymbol{B}$ 得，$(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}$，又 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\1&0&-1\\1&0&2\end{pmatrix}$，对 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$ 施行初等行变换

$$(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})\to\begin{pmatrix}1&-1&0&1&-1\\1&0&-1&2&0\\1&0&2&5&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&0&1&-1\\0&1&-1&1&1\\0&1&2&4&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&0&1&-1\\0&1&-1&1&1\\0&0&3&3&-3\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&-1&0&1&-1\\0&1&0&2&0\\0&0&1&1&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&3&-1\\0&1&0&2&0\\0&0&1&1&-1\end{pmatrix}，故 \boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}3&-1\\2&0\\1&-1\end{pmatrix}.$$

23. 解：对该方程组的增广矩阵$(\boldsymbol{A}，\boldsymbol{b})$施行初等行变换

$$(A,b)=\begin{pmatrix}1&1&0&0&5\\2&1&1&2&1\\5&3&2&2&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0&0&5\\0&-1&1&2&-9\\0&-2&2&2&-22\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0&0&5\\0&-1&1&2&-9\\0&0&0&-2&-4\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&1&0&0&-8\\0&1&-1&0&13\\0&0&0&1&2\end{pmatrix}.$$

对应的同解方程组为 $\begin{cases}x_1+x_3=-8\\x_2-x_3=13\\x_4=2\end{cases}$，即 $\begin{cases}x_1=-x_3-8\\x_2=x_3+13\\x_4=2\end{cases}$，$x_3$ 为自由未知量，令 $x_3=0$，

得方程组的一个特解为 $\boldsymbol{\eta}^*=(-8,13,0,2)^{\mathrm{T}}$．对应的导出组为 $\begin{cases}x_1=-x_3\\x_2=x_3\\x_4=0\end{cases}$，令 $x_3=1$，

得基础解系 $\boldsymbol{\xi}=(-1,\ 1,\ 1,\ 0)^{\mathrm{T}}$，于是，原方程组的通解可表示为 $\boldsymbol{\mu}=\boldsymbol{\eta}^*+k\boldsymbol{\xi}$，$k$ 为任意实数.

24. 解：由于 $(\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_4^{\mathrm{T}})=\begin{pmatrix}2&1&2&3\\4&1&3&5\\2&0&1&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&1&2&3\\0&-1&-1&-1\\0&-1&-1&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&\frac{1}{2}&1\\0&1&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，

所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 为其一个极大无关组，且 $\boldsymbol{\alpha}_3=\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$．

25．解：由于 $A=\begin{pmatrix}1&2&-1&1\\3&2&\lambda&-1\\5&6&3&t\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&-1&1\\0&-4&\lambda+3&-4\\0&-4&8&t-5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&-1&1\\0&-4&\lambda+3&-4\\0&0&5-\lambda&t-1\end{pmatrix}$，

因 $r(A)=2$，故 $\begin{cases}5-\lambda=0\\t-1=0\end{cases}$，从而 $\lambda=5$，$t=1$．

26．解：由于 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-3&2&0\\2&\lambda-6&0\\0&0&\lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-3)(\lambda^2-9\lambda+14)=(\lambda-2)(\lambda-3)(\lambda-7)$，

故 A 的特征多项式的三个根为 $\lambda_1=2,\lambda_2=3,\lambda_3=7$．

（1）对特征根 $\lambda_1=2$，考虑齐次线性方程组 $\begin{cases}-x_1+2x_2=0\\2x_1-4x_2=0\\x_3=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}x_1=2x_2\\x_3=0\end{cases}$，令 $x_2=1$，

得特征向量为：$p_1=(2,1,0)^{\mathrm T}$；

（2）对特征根 $\lambda_2=3$，考虑齐次线性方程组 $\begin{cases}2x_2=0\\2x_1-3x_2=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}x_1=0\\x_2=0\end{cases}$，令 $x_3=1$，

得特征向量为：$p_2=(0,0,1)^{\mathrm T}$；

(3) 对特征根 $\lambda_2=7$，考虑齐次线性方程组 $\begin{cases}4x_1+2x_2=0\\2x_1+x_2=0\\4x_3=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}2x_1=-x_2\\x_3=0\end{cases}$，令 $x_2=-2$，

得特征向量为：$p_3=(1,-2,0)^{\mathrm T}$；

令 $P=(p_1,p_2,p_3)=\begin{pmatrix}2&0&1\\1&0&-2\\0&1&0\end{pmatrix}$，则 P 可逆，且有 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}2&&\\&3&\\&&7\end{pmatrix}$.

四、证明题（本题 6 分）

27．证明：设存在一组常数 k_1，k_2，k_3，k_4，使得 $k_1\beta_1+k_2\beta_2+k_3\beta_3+k_4\beta_4=0$，即

$k_1(\alpha_1+\alpha_2)+k_2(\alpha_2+\alpha_3)+k_3(\alpha_3+\alpha_4)+k_4(\alpha_4+\alpha_1)=(k_1+k_4)\alpha_1+(k_1+k_2)\alpha_2+(k_2+k_3)\alpha_3$

$+(k_3+k_4)\alpha_4=0$,

由于 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关，所以 $\begin{cases}k_1+k_4=0\\k_1+k_2=0\\k_2+k_3=0\\k_3+k_4=0\end{cases}$，其系数行列式 $\begin{vmatrix}1&0&0&1\\1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\end{vmatrix}=0$，故存在非零解,

即 k_1，k_2，k_3，k_4 不全为零，所以 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 线性相关.

全国2012年10月高等教育自学考试线性代数（经管类）试题参考答案

一、单项选择题（本大题共10小题，每小题2分，共20分）

1．B　2．C　3．B　4．D　5．C　6．D　7．B　8．A　9．A　10．C

二、填空题（本大题共10小题，每小题2分，共20分）

11．0　　12．$\begin{pmatrix}2&1\\4&3\end{pmatrix}$　　13．$(5,10,9)^{\mathrm{T}}$　　14．$\dfrac{1}{3}$　　15．4

16．-1　　17．-1　　18．0　　19．-2　　20．$x_2^2+2x_3^2+2x_1x_3-2x_2x_3$

三、计算题（本大题共6小题，每小题9分，共54分）

21．解：

$$\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix}2a+2b&a&b\\2a+2b&a+b&b\\2a+2b&b&a+b\end{vmatrix}=2(a+b)\begin{vmatrix}1&a&b\\1&a+b&b\\1&b&a+b\end{vmatrix}=2(a+b)\begin{vmatrix}1&a&b\\0&b&0\\0&b-a&a\end{vmatrix}=2ab(a+b).$$

22．解：对$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}})$施行初等行变换得

$$\left(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\right)=\begin{pmatrix}1&0&0&1&0&0\\2&1&0&1&2&4\\-2&2&2&2&2&6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&1&0&0\\0&1&0&-1&2&4\\0&2&2&4&2&6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&1&0&0\\0&1&0&-1&2&4\\0&0&1&3&-1&-1\end{pmatrix}，故$$

$$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&2&4\\3&-1&-1\end{pmatrix}.$$

23. 解：由于$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=\begin{pmatrix}1&-1&2&1\\2&1&4&-2\\3&0&6&-1\\4&-4&3&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&2&1\\0&3&0&-4\\0&3&0&-4\\0&0&-5&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&2&1\\0&3&0&-4\\0&0&5&3\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

所以该向量组的秩为3，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$为其一个极大无关组.（答案不唯一）

24．解：对该方程组的增广矩阵$(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{b})$施行初等行变换

$$\left(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}\right)=\begin{pmatrix}1&1&-1&-1&1\\2&1&1&1&4\\4&3&-1&-1&6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-1&-1&1\\0&-1&3&3&2\\0&-1&3&3&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&2&2&3\\0&1&-3&-3&-2\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

对应的同解方程组为$\begin{cases}x_1+2x_3+2x_4=3\\x_2-3x_3-3x_4=-2\end{cases}$，即$\begin{cases}x_1=-2x_3-2x_4+3\\x_2=3x_3+3x_4-2\end{cases}$，$x_3,x_4$为自由未知量，

令 $x_3 = x_4 = 0$，得方程组的一个特解为 $\boldsymbol{\eta}^* = (3, -2, 0, 0)^{\mathrm{T}}$．对应的导出组为 $\begin{cases} x_1 = -2x_3 - 2x_4 \\ x_2 = 3x_3 + 3x_4 \end{cases}$，分别取 $x_3 = 1,\ x_4 = 0$ 和 $x_3 = 0,\ x_4 = 1$，可得基础解系 $\boldsymbol{\xi}_1 = (-2,\ 3,\ 1,\ 0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\xi}_2 = (-2,\ 3,\ 0,\ 1)^{\mathrm{T}}$．

于是，原方程组的通解可表示为 $\eta = \eta^* + k_1\boldsymbol{\xi}_1 + k_2\boldsymbol{\xi}_2$，$k_1$ 和 k_2 为任意实数.

25．解：由 $|\lambda \boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 = 0$，得矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的的三个特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$．

对特征值 $\lambda = 0$，考虑齐次线性方程组 $\begin{cases} -x_2 = 0 \\ -x_3 = 0 \end{cases}$，即 $\begin{cases} x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$，$x_1$ 为自由未知量，令 $x_1 = 1$，得基础解系为：$\boldsymbol{p} = (1, 0, 0)^{\mathrm{T}}$，故 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 $\lambda = 0$ 的全部特征向量为 $k\,\boldsymbol{p}$，k 是不为零的任意常数.

26．解：该二次型的对称矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 2 & 0 \\ b & 0 & -2 \end{pmatrix}$，设 $\boldsymbol{A}$ 的三个特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$，由已知条件得，$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = a + 2 + (-2) = 1$，$\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = \begin{vmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 2 & 0 \\ b & 0 & -2 \end{vmatrix} = -4a - 2b^2 = -12$，解得 $a = 1$，$b = \pm 2$．

四、证明题（本题 6 分）

27．证明：由于 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶可逆矩阵，则 $\boldsymbol{AB}$ 也为 n 阶可逆矩阵，且

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*,\quad \boldsymbol{B}^{-1} = \frac{1}{|\boldsymbol{B}|}\boldsymbol{B}^*,\quad (\boldsymbol{AB})^{-1} = \frac{1}{|\boldsymbol{AB}|}(\boldsymbol{AB})^*,$$

所以 $(\boldsymbol{AB})^* = |\boldsymbol{AB}|(\boldsymbol{AB})^{-1} = |\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{B}|\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1} = (|\boldsymbol{B}|\boldsymbol{B}^{-1})(|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}) = \boldsymbol{B}^*\boldsymbol{A}^*$．

全国 2013 年 1 月高等教育自学考试线性代数（经管类）试题参考答案

一、单项选择题（本大题共 10 小题，每小题 2 分，共 20 分）

1．D　2．C　3．A　4．C　5．C　6．D　7．B　8．C　9．A　10．B

二、填空题（本大题共 10 小题，每小题 2 分，共 20 分）

11．-32　　12．$+$（或正）　　13．$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$　　14．-2　　15．3

16．$\boldsymbol{X}=k\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$，$k$ 为任意常数　　17．$\lambda_1=\lambda_2=3$　　18．60　　19．0

20．$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$或$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

三、计算题（本大题共 6 小题，每小题 9 分，共 54 分）

21．解：$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & -3 & 4 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{vmatrix}=24\times 8=192$.

22．解：由 $\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E}$ 得，$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{E}$，又因$|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & -2 \\ 4 & -3 & 0 \end{vmatrix}=-74$，则 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$ 可逆，从而 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 0 & 5 & -2 \\ 4 & -3 & 2 \end{pmatrix}$.

23．解：由于

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 & -3 \\ 1 & -1 & 3 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & -5 \\ 3 & 1 & 5 & 6 & -7 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 & -3 \\ 0 & -2 & 2 & -6 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & -6 & 2 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

所以该向量组的秩为 2，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 为其一个极大无关组.（答案不唯一）

24．解：对该方程组的增广矩阵$(\boldsymbol{A}，\boldsymbol{b})$施行初等行变换

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 7 & 7 & t \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -4 & -5 & -4 \\ 0 & -1 & 4 & 5 & t-3 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -4 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t-7 \end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -4 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t-7 \end{pmatrix}$$

当 $t=7$ 时，方程组有解．对应的同解方程组为$\begin{cases} x_1=x_3+3x_4-1 \\ x_2=4x_3+5x_4-4 \end{cases}$，$x_3,x_4$ 为自由未知

量，令 $x_3=x_4=0$，得方程组的一个特解为 $\boldsymbol{\eta}^*=(-1,-4,0,0)^{\mathrm T}$．对应的导出组为 $\begin{cases}x_1=x_3+3x_4\\x_2=4x_3+5x_4\end{cases}$，分别取 $x_3=1,\ x_4=0$ 和 $x_3=0,\ x_4=1$，可得基础解系 $\boldsymbol{\xi}_1=(1,\ 4,\ 1,\ 0)^{\mathrm T}$，$\boldsymbol{\xi}_2=(3,\ 5,\ 0,\ 1)^{\mathrm T}$．

于是，原方程组的通解可表示为 $\eta=\eta^*+k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2$，$k_1$ 和 k_2 为任意实数.

25．解：由 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{D}$ 得，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{PDP}^{-1}$，从而 $\boldsymbol{A}^5=\boldsymbol{PD}^5\boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}(-1)^5&0\\0&2^2\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}$，又 $\boldsymbol{P}^{-1}=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}1&4\\-1&-1\end{pmatrix}$，所以 $\boldsymbol{A}^5=\begin{pmatrix}-1&-4\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0\\0&32\end{pmatrix}\bullet\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}1&4\\-1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}43&44\\-11&-12\end{pmatrix}$.

26．解：该二次型的对称矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&-1&1\\-1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$.

由 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda&1&-1\\1&\lambda&-1\\-1&-1&\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda&1&-1\\1-\lambda&\lambda-1&0\\-1&-1&\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda+1&1&-1\\0&\lambda-1&0\\-2&-1&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda^2+\lambda-2)=$ $(\lambda+2)(\lambda-1)^2=0$，得矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的的三个特征值为 $\lambda_1=-2,\ \lambda_2=\lambda_3=1$.

（1）对特征值 $\lambda_1=-2$，考虑齐次线性方程组 $(-2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=0$，因
$$(-2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=\begin{pmatrix}-2&1&-1\\1&-2&-1\\-1&-1&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix},$$

对应的同解方程组为 $\begin{cases}x_1=-x_3\\x_2=-x_3\end{cases}$，$x_3$ 为自由未知量，令 $x_3=-1$，得特征向量为：$\boldsymbol{p}_1=(1,1,-1)^{\mathrm T}$；

（2）对特征值 $\lambda_2=\lambda_3=1$，考虑齐次线性方程组 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=0$，因
$$(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&1&-1\\-1&-1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

对应的同解方程组为 $x_1=-x_2+x_3$，x_2,x_3 为自由未知量，通过直观法得到与 $\boldsymbol{p}_1$ 正交的两个特征向量为：

$\boldsymbol{p}_2=(-1,1,0)^{\mathrm T}$，$\boldsymbol{p}_3=(1,1,2)^{\mathrm T}$；

$\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3$ 单位化得：$\tilde{\boldsymbol{p}}_1=\dfrac{\sqrt3}{3}(1,1,-1)^{\mathrm T}$，$\tilde{\boldsymbol{p}}_2=\dfrac{\sqrt2}{2}(-1,1,0)^{\mathrm T}$，$\tilde{\boldsymbol{p}}_3=\dfrac{\sqrt6}{6}(1,1,2)^{\mathrm T}$．令

$$\boldsymbol{p}=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix},$$

则 $\boldsymbol{P}$ 为正交矩阵，从而通过正交变换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{PY}$，可将该二次型化为标准形：$f=-2y_1^2+y_2^2+y_3^2$.

四、证明题（本题 6 分）

27．证明：设 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{22} \\ a_{23} \end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix} a_{31} \\ a_{32} \\ a_{33} \end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix} a_{41} \\ a_{42} \\ a_{43} \end{pmatrix}$，为任意四个三维向量，

向量组 $\boldsymbol{A}$：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关 $\Leftrightarrow \mathrm{r}(\boldsymbol{A})<4$，而 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)\leqslant 3<4$，所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关，由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 假设的任意性，即命题成立.

全国 2013 年 4 月高等教育自学考试线性代数（经管类）试题参考答案

一、单项选择题（本大题共 5 小题，每小题 2 分，共 10 分）

1．C　2．D　3．A　4．B　5．C

二、填空题（本大题共 10 小题，每小题 2 分，共 20 分）

6．6　7．-2　8．$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 5 \\ 1 & 5 & 14 \end{pmatrix}$　9．$(10,25,-16)$　10．$(-2,1,0)^{\mathrm{T}}$

11．2　12．3　13．-4　14．6　15．$x_1^2+2x_2^2-4x_2x_3$

三、计算题（本大题共 7 小题，每小题 9 分，共 63 分）

16．解：$D=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ -1 & 1 & 0 & b \\ 0 & -1 & 1 & c \\ 0 & 0 & -1 & d \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & a+b \\ 0 & 0 & 1 & a+b+c \\ 0 & 0 & 0 & a+b+c+d \end{vmatrix}=a+b+c+d$.

17．解：由于$\begin{vmatrix}1&1&-1\\0&2&2\\0&-1&0\end{vmatrix}=2\neq 0$，故$\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&2&2\\0&-1&0\end{pmatrix}$可逆，且$\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&2&2\\0&-1&0\end{pmatrix}^{-1}=$

$\begin{pmatrix}1&1/2&2\\0&0&-1\\0&1/2&1\end{pmatrix}$，由原式得到$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}2&1&-1\\4&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&2&2\\0&-1&0\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}2&1&-1\\4&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1/2&2\\0&0&-1\\0&1/2&1\end{pmatrix}=$

$\begin{pmatrix}2&\frac{1}{2}&2\\4&\frac{3}{2}&7\end{pmatrix}$

18．解：由条件可知对$\boldsymbol{A}$进行了两次初等列变换，先将$\boldsymbol{A}$化为$\boldsymbol{B}$，再将$\boldsymbol{B}$化为$\boldsymbol{C}$，对应的两个初等矩阵分别为：$\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$．并且有$(\boldsymbol{AP}_1)\boldsymbol{P}_2=\boldsymbol{BP}_2=\boldsymbol{C}$，

又$(\boldsymbol{AP}_1)\boldsymbol{P}_2=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2)$，从而 $\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

19．解：令$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_4$，即$\begin{cases}-2x_1+x_2+3x_3=0\\x_1-3x_2=-1\\2x_2+2x_3=4\\3x_1+4x_2-x_3=9\end{cases}$，由$\begin{pmatrix}-2&1&3&0\\1&-3&0&-1\\0&2&2&4\\3&4&-1&9\end{pmatrix}\to$

$\begin{pmatrix}1&-3&0&-1\\0&-5&3&-2\\0&2&2&4\\0&13&-1&12\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-3&0&-1\\0&1&1&2\\0&-5&3&-2\\0&13&-1&12\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-3&0&-1\\0&1&1&2\\0&0&8&8\\0&0&-14&-14\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-3&0&-1\\0&1&1&2\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to$

$\begin{pmatrix}1&0&0&2\\0&1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$得到$x_1=2$，$x_2=1$，$x_3=1$．

所以$\boldsymbol{\alpha}_4$可以由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表出，且表示式为$\boldsymbol{\alpha}_4=2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$．

20．解：对该方程组的增广矩阵($\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{b}$)施行初等行变换

$$\left(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}\right)=\begin{pmatrix}1&-1&0&0&a\\0&1&-1&0&2a\\0&0&1&-1&3a\\-1&0&0&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&0&0&a\\0&1&-1&0&2a\\0&0&1&-1&3a\\0&0&0&0&6a+1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&-1&6a\\0&1&0&-1&5a\\0&0&1&-1&3a\\0&0&0&0&6a+1\end{pmatrix}.$$

（1）当 $a=-\dfrac{1}{6}$ 时，方程组系数矩阵与增广矩阵的秩相等，方程组有解.

（2）有解时对应的同解方程组为 $\begin{cases}x_1=x_4-1\\x_2=x_4-\dfrac{5}{6}\\x_3=x_4-\dfrac{1}{2}\end{cases}$，$x_4$ 为自由未知量，

令 $x_4=0$，得方程组的一个特解为 $\boldsymbol{\eta}^*=(-1,-\dfrac{5}{6},-\dfrac{1}{2},0)^{\mathrm{T}}$.

对应的导出组为 $\begin{cases}x_1=x_4\\x_2=x_4\\x_3=x_4\end{cases}$，取 $x_4=1$，可得基础解系 $\boldsymbol{\xi}=(1,\ 1,\ 1,\ 1)^{\mathrm{T}}$.

于是，原方程组的通解可表示为 $\eta=\eta^*+k\boldsymbol{\xi}$，$k$ 为任意实数.

21．解：该二次型的对称矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&-1\\-1&3\end{pmatrix}$．由 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-3&1\\1&\lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda-4)=0$，得矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的的二个特征值为 $\lambda_1=2,\ \lambda_2=4$.

对特征值 $\lambda_1=2$，考虑齐次线性方程组 $(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=0$，因 $\left(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\right)=\begin{pmatrix}-1&1\\1&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1\\0&0\end{pmatrix}$，

对应的同解方程组为 $x_1=x_2$，x_2 为自由未知量，令 $x_2=1$，得特征向量为：$\boldsymbol{p}_1=(1,1)^{\mathrm{T}}$；

对特征值 $\lambda_2=4$，考虑齐次线性方程组 $(4\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=0$，因 $\left(4\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\right)=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$，

对应的同解方程组为 $x_1=-x_2$，x_2 为自由未知量，令 $x_2=1$，得特征向量为：$\boldsymbol{p}_2=(-1,1)^{\mathrm{T}}$；

将 $\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2$ 单位化得：$\tilde{\boldsymbol{p}}_1=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1,1)^{\mathrm{T}}$，$\tilde{\boldsymbol{p}}_2=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(-1,1)^{\mathrm{T}}$．令 $\boldsymbol{P}=\left(\tilde{\boldsymbol{P}}_1,\tilde{\boldsymbol{P}}_2\right)=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{\sqrt{2}}&-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\\\dfrac{1}{\sqrt{2}}&\dfrac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$，

则 $\boldsymbol{P}$ 为正交矩阵，从而通过正交变换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{PY}$，可将该二次型化为标准形：$f=2y_1^2+4y_2^2$.

由于 $\boldsymbol{A}$ 的特征值都大于零，故该二次型正定.

22．解：由特征方程$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ 0 & -2 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^3=0$，得矩阵$\boldsymbol{A}$的的特征值为$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1$．

因为$(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})$的秩为 1，所以$(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=0$只有两个线性无关的解向量，从而 3 阶矩阵$\boldsymbol{A}$只有两个线性无关的特征向量．因此，$\boldsymbol{A}$不能与对角矩阵相似.

四、证明题（本题 7 分）

23．证明：设λ是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，且存在向量$\boldsymbol{p}$使得$\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}=\lambda\boldsymbol{p}$，由此可得$\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{p}=\lambda^k\boldsymbol{p}$．又因$\boldsymbol{A}^k=0$，

故$\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{p}=0$，从而$\lambda^k\boldsymbol{p}=0$，而$\boldsymbol{p}\neq 0$，所以$\lambda^k=0$，即$\lambda=0$．因此$\boldsymbol{A}$的特征值均为 0.

全国 2013 年 7 月高等教育自学考试线性代数（经管类）试题参考答案

一、单项选择题（本大题共 10 小题，每小题 2 分，共 20 分）

1．D　2．C　3．C　4．B　5．A　6．B　7．D　8．B　9．A　10．D

二、填空题（本大题共 10 小题，每小题 2 分，共 20 分）

11．3　12．$\boldsymbol{O}$　13．$\frac{1}{2}$　14．$(2,4,4)$　15．3

16．$=$　17．$al\neq kb$　18．192　19．3　20．0

三、计算题（本大题共 6 小题，每小题 9 分，共 54 分）

21．解：

$$\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix}x & -1 & 0 & 0\\ 0 & x & -1 & 0\\ 0 & 0 & x & -1\\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3\end{vmatrix}=x\bullet\begin{vmatrix}x & -1 & 0\\ 0 & x & -1\\ a_1 & a_2 & a_3\end{vmatrix}-a_0\bullet\begin{vmatrix}-1 & 0 & 0\\ x & -1 & 0\\ 0 & x & -1\end{vmatrix}=x^2\bullet\begin{vmatrix}x & -1\\ a_2 & a_3\end{vmatrix}+xa_1\bullet\begin{vmatrix}-1 & 0\\ x & -1\end{vmatrix}+a_0$$

$$=x^2(xa_3+a_2)+xa_1+a_0=x^3a_3+x^2a_2+xa_1+a_0.$$

22．解：由$(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{X})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$得，$\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{X}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}^{-1}$，从而$\boldsymbol{X}=\frac{1}{3}\left(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}^{-1}\right)$，又因$|\boldsymbol{B}|=1$，则$\boldsymbol{B}$可逆，且$\boldsymbol{B}^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 3 & -1\\ 0 & -5 & 2\end{pmatrix}$，从而

$$X=\frac{1}{3}\left(A-CB^{-1}\right)=\frac{1}{3}\left(\begin{pmatrix}4&-3&1\\-1&20&4\\1&18&4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&-4&3\\2&0&-1\\1&2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&3&-1\\0&-5&2\end{pmatrix}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\left(\begin{pmatrix}4&-3&1\\-1&20&4\\1&18&4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&-27&10\\2&5&-2\\1&6&-2\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}1&8&-3\\-1&5&2\\0&4&2\end{pmatrix}.$$

23．解：由 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=\begin{pmatrix}1&-3&0&-1\\-2&1&3&0\\0&2&2&4\\3&4&-1&9\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-3&0&-1\\0&-5&3&-2\\0&2&2&4\\0&13&-1&12\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-3&0&-1\\0&1&1&2\\0&-5&3&-2\\0&13&-1&12\end{pmatrix}$

$\to\begin{pmatrix}1&-3&0&-1\\0&1&1&2\\0&0&8&8\\0&0&-14&-14\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-3&0&-1\\0&1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&2\\0&1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，可知秩$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=$秩$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，所以 $\boldsymbol{\alpha}_4$ 是否可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，且 $\boldsymbol{\alpha}_4=2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$.

24．解：对该方程组的增广矩阵$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$施行初等行变换

$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=\begin{pmatrix}1&-1&0&2\\3&2&3&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&0&2\\0&5&3&-5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&\frac{3}{5}&1\\0&1&\frac{3}{5}&-1\end{pmatrix}$，对应的同解方程组为

$\begin{cases}x_1=-\dfrac{3}{5}x_3+1\\x_2=-\dfrac{3}{5}x_3-1\end{cases}$，$x_3$ 为自由未知量，令 $x_3=0$，得方程组的一个特解为 $\boldsymbol{\eta}^*=(1,-1,0)^{\mathrm{T}}$.

对应的导出组为$\begin{cases}x_1=-\dfrac{3}{5}x_3\\x_2=-\dfrac{3}{5}x_3\end{cases}$，取 $x_3=-5$ 得基础解系 $\boldsymbol{\xi}=(3,\ 3,\ -5)^{\mathrm{T}}$.

于是，原方程组的通解可表示为 $\eta=\eta^*+k\boldsymbol{\xi}$，$k$ 为任意实数.

25．解：因为 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有 3 个线性无关的特征向量，所以矩阵 $\boldsymbol{A}$ 相似于对角矩阵,

即存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&2\\0&2&5\end{pmatrix}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$.

从而，$A=P\Lambda P^{-1}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&2\\0&2&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&2\\0&2&5\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&-2\\0&0&-5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/2&0&0\\0&5&-2\\0&-2&1\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&4&-2\\0&10&-5\end{pmatrix}.$$

26．解：该二次型的对称矩阵为 $A=\begin{pmatrix}2&t&1\\t&1&0\\1&0&3\end{pmatrix}$．因当二次型为正定二次型时，其对称矩阵为正定矩阵,

故对称矩阵 A 应为正定矩阵．又因其对应的三个顺序主子式为

$$D_1=|2|=2，\quad D_2=\begin{vmatrix}2&t\\t&1\end{vmatrix}=2-t^2，\quad D_3=\begin{vmatrix}2&t&1\\t&1&0\\1&0&3\end{vmatrix}=5-3t^2，$$

所以$\begin{cases}D_1=2>0\\D_2=2-t^2>0\\D_3=5-3t^2>0\end{cases}$，即 $t^2<\dfrac{5}{3}$，当 $t\in\left(-\dfrac{\sqrt{15}}{3},\ \dfrac{\sqrt{15}}{3}\right)$时，该二次型为正定二次型.

四、证明题（本题 6 分）

27．证明：设存在一组常数 k_1, k_2, k_3，使得 $k_1(2\alpha_1-2\alpha_2)+k_2(2\alpha_1-2\alpha_2+\alpha_3)+k_3(\alpha_2+4\alpha_3)=0$,

即 $(2k_1+2k_2)\alpha_1+(-2k_1-2k_2+k_3)\alpha_2+(k_2+4k_3)\alpha_3=0$．由于 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，则必有$\begin{cases}2k_1+2k_2=0\\-2k_1-2k_2+k_3=0\\k_2+4k_3=0\end{cases}$，

解得此方程组只有唯一零解：$k_1=k_2=k_3=0$，故向量组 $2\alpha_1-2\alpha_2, 2\alpha_1-2\alpha_2+\alpha_3, \alpha_2+4\alpha_3$ 也线性无关.

全国 2013 年 10 月高等教育自学考试线性代数（经管类）试题参考答案

一、单项选择题（本大题共 5 小题，每小题 2 分，共 10 分）

1．B　　2．B　　3．D　　4．A　　5．C

二、填空题（本大题共 10 小题，每小题 2 分，共 20 分）

6. $\begin{pmatrix}1&2\\2&2\end{pmatrix}$　　7. 16　　8. $a\neq 2$　　9. $(1,5,-1)^{\mathrm T}$　　10. 0

11. 2　　12. 5　　13. -4　　14. 5　　15. $t>0$

三、计算题（本大题共 7 小题，每小题 9 分，63 分）

16. 解：

$$D=\begin{vmatrix}a-b-c&2a&2a\\2b&b-a-c&2b\\2c&2c&c-a-b\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a+b+c&a+b+c&a+b+c\\2b&b-a-c&2b\\2c&2c&c-a-b\end{vmatrix}$$

$$=(a+b+c)\begin{vmatrix}1&1&1\\2b&b-a-c&2b\\2c&2c&c-a-b\end{vmatrix}$$

$$=(a+b+c)\begin{vmatrix}1&1&0\\2b&b-a-c&0\\2c&2c&-c-a-b\end{vmatrix}=-(a+b+c)^2\begin{vmatrix}1&1\\2b&b-a-c\end{vmatrix}=(a+b+c)^3.$$

17. 解：（1）由 $\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm T}=\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)\begin{pmatrix}1\\2\\k\end{pmatrix}=2+\frac{k}{3}=3$ ，得 $k=3$.

（2）由于 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm T}\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)=\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{1}{3}\\2&1&\frac{2}{3}\\3&\frac{3}{2}&1\end{pmatrix}$，则

$$\boldsymbol{A}^{10}=(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm T}\boldsymbol{\beta})^{10}=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm T}(\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm T})^9\boldsymbol{\beta}=(\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm T})^9\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm T}\boldsymbol{\beta}=3^9\boldsymbol{A}=3^9\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{1}{3}\\2&1&\frac{2}{3}\\3&\frac{3}{2}&1\end{pmatrix}.$$

18．解：由于$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1&2&3\\2&3&1\\3&4&0\end{vmatrix}=-1\neq 0$，故$\boldsymbol{A}$可逆，且$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}4&-12&7\\-3&9&-5\\1&2&1\end{pmatrix}$．由$\boldsymbol{XA}=\boldsymbol{B}$可得

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{BA}^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\2&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&-12&7\\-3&9&-5\\1&-2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&-10&6\\8&-24&14\end{pmatrix}.$$

19．解：以$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$为列构造矩阵$\boldsymbol{A}$，对$\boldsymbol{A}$进行初等行变换得

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=\begin{pmatrix}1&-1&-3&-6\\0&-1&4&14\\2&-2&-4&-6\\0&0&1&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&-3&-6\\0&-1&4&14\\0&0&2&6\\0&0&1&3\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&-1&0&3\\0&-1&0&2\\0&0&1&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-2\\0&0&1&3\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

故该向量组的秩为 3，向量组的一个极大线性无关组为$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$，且$\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3$．

（极大线性无关组不唯一）

20．解：由于基础解系由 2 个 3 维向量组成，故$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=3-2=1$．

从而设所求方程组为$ax_1+bx_2+cx_3=0$，将$\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2$代入，得$\begin{cases}-2a+b=0\\3a+c=0\end{cases}$，即$\begin{cases}b=2a\\c=-3a\end{cases}$，令$a=1$（注：此处可以取任意非零常数），则$b=2$，$c=-3$，

故所求方程组为$x_1+2x_2-3x_3=0$．

21．解：设$\boldsymbol{\alpha}_4=(x_1,x_2,x_3,x_4)^{\mathrm{T}}$与$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$均正交，则有$\begin{cases}x_1-x_2-x_3+x_4=0\\x_1+x_2=0\\x_1-x_2+2x_3=0\end{cases}$，

该方程组的一个基础解系为$(-1,\ 1,\ 1,\ 3)^{\mathrm{T}}$，则$\boldsymbol{\alpha}_4=(-1,\ 1,\ 1,\ 3)^{\mathrm{T}}$即为所求的向量.

注：所求向量可以是$(-1,\ 1,\ 1,\ 3)^{\mathrm{T}}$的任意非零常数倍.

22．解：由

$$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2-2x_2^2-4x_1x_3+8x_2x_3=2(x_1^2-2x_1x_3+x_3^2)-2(x_2^2-4x_2x_3+4x_3^2)+6x_3^2$$

$$=2(x_1-x_3)^2-2(x_2-2x_3)^2+6x_3^2,$$

令 $\begin{cases}y_1=x_1-x_3\\y_2=x_2-2x_3\\y_3=x_3\end{cases}$，则可逆线性变换为 $\begin{cases}x_1=y_1+y_3\\x_2=y_2+2y_3\\x_3=y_3\end{cases}$，则的标准形为 $2y_1^2-2y_2^2+6y_3^2$.

四、证明题（本题 7 分）

23．证明：设 $\boldsymbol{\alpha}$ 是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=0$ 的解，则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=0$，用 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 左乘等式两边，有 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=0$，

从而 $\boldsymbol{\alpha}$ 是 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=0$ 的解.

反之，设 $\boldsymbol{\alpha}$ 是 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=0$ 的解，则 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=0$，用 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 左乘等式两边，有 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha})=0$，

从而 $\boldsymbol{\alpha}$ 也是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=0$ 的解.

综上，方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=0$ 与方程组 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=0$ 同解.

全国 2014 年 4 月高等教育自学考试线性代数（经管类）试题参考答案

一、单项选择题（本大题共 5 小题，每小题 2 分，共 10 分）

1．C　2．A　3．B　4．D　5．C

二、填空题（本大题共 10 小题，每小题 2 分，共 20 分）

6．0　7．4　8．$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ 或 $\boldsymbol{E}_2$　9．$\frac{1}{3}$　10．-2　11．$\left(\frac{4}{5},\frac{3}{5}\right)$

12．1　13．$\alpha_1+k(\alpha_1-\alpha_2)$，$k$ 为任意实数　14．$-\frac{1}{2}$　15．2

三、计算题（本大题共 7 小题，每小题 9 分，63 分）

16．解：$\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix}1&3&2&4\\4&1&3&2\\2&4&1&3\\3&2&4&1\end{vmatrix}=10\begin{vmatrix}1&3&2&4\\1&1&3&2\\1&4&1&3\\1&2&4&1\end{vmatrix}=10\begin{vmatrix}1&3&2&4\\0&-2&1&-2\\0&1&-1&-1\\0&-1&2&-3\end{vmatrix}=10\begin{vmatrix}-2&-1&-4\\1&0&0\\-1&1&-4\end{vmatrix}$

$=-10(4+4)=-80$.

17. 解：由矩阵 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 的构成可知，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 1，2 行互换后，第 3 行的元素乘以 -3 再加到第 2 行，即得矩阵 $\boldsymbol{B}$，故 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{T}_{23}(-3)\boldsymbol{P}_{12}\boldsymbol{A}$，所以 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{T}_{23}(-3)\boldsymbol{P}_{12}$

$$=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-3\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&-3\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

18. 解：原矩阵方程等价为 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$，下面用初等行变换法求 $\boldsymbol{X}$

$$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}})=\begin{pmatrix}1&2&4&1&2&-1\\1&2&3&0&1&2\\2&3&3&0&1&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&4&1&2&-1\\0&0&-1&-1&-1&3\\0&-1&-5&-2&-3&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&4&1&2&-1\\0&1&5&2&3&-4\\0&0&1&1&1&-3\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&2&0&-3&-2&11\\0&1&0&-3&-2&11\\0&0&1&1&1&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&3&2&-11\\0&1&0&-3&-2&11\\0&0&1&1&1&-3\end{pmatrix},$$

所以 $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}3&-3&1\\2&-2&1\\-11&11&-3\end{pmatrix}$.

19. 解：以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5$ 构造矩阵，对其进行初等行变换得

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5)=\begin{pmatrix}1&1&0&-1&4\\-1&0&2&0&-1\\2&1&0&-3&5\\1&2&1&-1&7\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0&-1&4\\0&1&2&-1&3\\0&-1&0&-1&-3\\0&1&1&0&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0&-1&4\\0&1&2&-1&3\\0&0&2&-2&0\\0&0&-1&1&0\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&0&-2&1\\0&1&0&1&3\\0&0&1&-1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

故该向量组的秩为 3，向量组的一个极大线性无关组为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$，且 $\boldsymbol{\alpha}_4=-2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_5=\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2$.

(极大线性无关组不唯一)

20. 解：对该方程组的增广矩阵$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$施行初等行变换

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=\begin{pmatrix}1&0&1&2&-1\\2&1&3&1&-4\\1&2&3&-4&-5\\-1&-1&-2&1&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1&2&-1\\0&1&1&-3&-2\\0&2&2&-6&-4\\0&-1&-1&3&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1&2&-1\\0&1&1&-3&-2\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix},$$

对应的同解方程组为 $\begin{cases}x_1=-x_3-2x_4-1\\x_2=-x_3+3x_4-2\end{cases}$，$x_3,x_4$ 为自由未知量，令 $x_3=x_4=0$，得方

程组的一个特解为 $\boldsymbol{\eta}^* = (-1, -2, 0, 0)^{\mathrm{T}}$．对应的导出组为 $\begin{cases} x_1 = -x_3 - 2x_4 \\ x_2 = -x_3 + 3x_4 \end{cases}$，分别取 $x_3 = 1,\ x_4 = 0$ 和 $x_3 = 0,\ x_4 = 1$，可得

基础解系 $\boldsymbol{\xi}_1 = (-1,\ -1,\ 1,\ 0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\xi}_2 = (-2,\ 3,\ 0,\ 1)^{\mathrm{T}}$．

于是，原方程组的通解可表示为 $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}^* + k_1\boldsymbol{\xi}_1 + k_2\boldsymbol{\xi}_2$，$k_1$ 和 k_2 为任意实数.

21．解：由 $|\lambda \boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \lambda-2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-2 & -1 \\ 0 & -1 & \lambda-\boldsymbol{a} \end{vmatrix} = (\lambda-2)[(\lambda-2)(\lambda-\boldsymbol{a})-1]$，知矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的另一个特征值为 $\lambda_2 = 2$, 设第 3 个特征值为 λ_3, 则有 $\begin{cases} 1+2+\lambda = 2+2+a \\ 1\times 2\times \lambda = 2(2a-1) \end{cases}$, 解得 $a = 2$，$\lambda_3 = 3$．

（1）当 $\lambda_1 = 1$ 时，齐次线性方程组 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = 0$ 所对应的等价方程组为 $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$，$x_3$ 为自由未知量，得其对应的特征向量为 $\boldsymbol{p}_1 = (0,1,-1)^{\mathrm{T}}$；

（2）当 $\lambda_2 = 2$ 时，齐次线性方程组 $(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = 0$ 所对应的等价方程组为 $\begin{cases} x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$，$x_1$ 为自由未知量，得其对应的特征向量为 $\boldsymbol{p}_2 = (1,0,0)^{\mathrm{T}}$；

（3）当 $\lambda_3 = 3$ 时，齐次线性方程组 $(3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = 0$ 所对应的等价方程组为 $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$，$x_3$ 为自由未知量，得其对应的特征向量为 $\boldsymbol{p}_3 = (0,1,1)^{\mathrm{T}}$；

将三个特征向量 $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3$ 单位化得，$\bar{\boldsymbol{p}}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, \bar{\boldsymbol{p}}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \bar{\boldsymbol{p}}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$，令

$$\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix},$$

则 Q 为正交矩阵，且有 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{\Lambda} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{pmatrix}$.

22．解：由

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+3x_2^2-2x_3^2+4x_1x_2+2x_2x_3=x_1^2+4x_1x_2+4x_2^2-x_2^2+2x_2x_3-x_3^2-x_3^2$$
$$=(x_1+2x_2)^2-(x_2-x_3)^2-x_3^2,$$

令 $\begin{cases} y_1=x_1+2x_2 \\ y_2=x_2-x_3 \\ y_3=x_3 \end{cases}$，则可逆线性变换为 $\begin{cases} x_1=y_1-2y_2-2y_3 \\ x_2=y_2+y_3 \\ x_3=y_3 \end{cases}$，则的标准形为 $y_1^2-y_2^2-y_3^2$.

四、证明题（本大题共 7 分）

23．证明：由已知条件知，$2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3$ 是齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=0$ 的三个解，并可写出矩阵等式，

$$(2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

因为表出矩阵的行列式 $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}=4\neq 0$，所以两向量组等价．又由 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 为齐次线性方程组

$\boldsymbol{Ax}=0$ 的一个基础解系，线性无关，则 $2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3$ 也线性无关，

故 $2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3$ 也是该方程组的基础解系.

全国 2014 年 7 月高等教育自学考试线性代数（经管类）试题参考答案

一、单项选择题（本大题共 10 小题，每小题 2 分，共 20 分）

1．A　2．C　3．D　4．D　5．C　6．B　7．A　8．C　9．C　10．B

二、填空题（本大题共 10 小题，每小题 2 分，共 20 分）

11．2　　12．-12　　13．$3\boldsymbol{E}$　　14．$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$　　15．1

16．$k_1(1,\ 0,\ -1)^{\mathrm{T}}+k_2(0,\ 1,\ -1)^{\mathrm{T}}$，$k_1,k_2$ 为任意实数　　17．n　　18．20

19. $\sqrt{19}$　　20. $0\ a>\frac{1}{2}$

三、计算题（本大题共 6 小题，每小题 9 分，共 54 分）

21. 解：$\begin{vmatrix}0&1&1&1\\1&0&1&1\\1&1&0&1\\1&1&1&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3&1&1&1\\3&0&1&1\\3&1&0&1\\3&1&1&0\end{vmatrix}=3\bullet\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&0&1&1\\1&1&0&1\\1&1&1&0\end{vmatrix}=3\bullet\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{vmatrix}=-3$.

22. 解：由

$$(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{E})=\begin{pmatrix}1&0&1&1&0&0\\0&1&2&0&1&0\\1&0&3&0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1&1&0&0\\0&1&2&0&1&0\\0&0&2&-1&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1&1&0&0\\0&1&2&0&1&0\\0&0&2&-1&0&1\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&1&1&0&0\\0&1&0&1&1&-1\\0&0&1&-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&\frac{3}{2}&0&-\frac{1}{2}\\0&1&0&1&1&-1\\0&0&1&-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}，所以\ \boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{3}{2}&0&-\frac{1}{2}\\1&1&-1\\-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

23. 解：以$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$为列构造矩阵$\boldsymbol{A}$，对$\boldsymbol{A}$进行初等行变换得

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_4^{\mathrm{T}})=\begin{pmatrix}-1&1&3&0\\2&2&2&4\\0&0&2&0\\1&5&0&6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&-3&0\\0&4&8&4\\0&0&1&0\\0&6&3&6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\0&4&0&4\\0&0&1&0\\0&6&0&6\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\0&1&0&1\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

故该向量组的秩为 3，向量组的一个极大线性无关组为$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$.（极大线性无关组不惟一）

24. 解：对该方程组的增广矩阵$(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{b})$施行初等行变换

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=\begin{pmatrix}1&1&2&1\\1&0&1&a\\2&1&3&b\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&2&1\\0&-1&-1&a-1\\0&-1&-1&b-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&2&1\\0&-1&-1&a-1\\0&0&0&b-a-1\end{pmatrix},$$

当$b-a-1=0$时，$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=2$，原方程组一定有解.

25．解：因为$|\boldsymbol{A}|=-2$，$|\boldsymbol{B}|=-2y$，所以由相似矩阵有相同的迹和相同的行列式得，

$\begin{cases}-2=-2y\\2+x=2+y-1\end{cases}$，解得$\begin{cases}x=0\\y=1\end{cases}$.

26．解：二次型的对称矩阵为$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\end{pmatrix}$．为了配出完全平方，先作线性变换

$\begin{cases}x_1=y_1+y_2\\x_2=y_1-y_2\\x_3=y_3\end{cases}$，有

$$\begin{aligned}f(x_1,x_2,x_3)&=x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1\\&=(y_1+y_2)(y_1-y_2)+(y_1-y_2)y_3+y_3(y_1+y_2)\\&=y_1^2-y_2^2+2y_1y_3+y_3^2-y_3^2\\&=(y_1+y_3)^2-y_2^2-y_3^2\end{aligned}$$

再作可逆线性变换$\begin{cases}z_1=y_1+y_3\\z_2=y_2\\z_3=y_3\end{cases}$，就可将原二次型化为标准形$f=z_1^2-z_2^2-z_3^2$.

四、证明题（本题 6 分）

27．证明：设存在一组常数k_1,k_2,k_3,k_4，使得$k_1\boldsymbol{\beta}_1+k_2\boldsymbol{\beta}_2+k_3\boldsymbol{\beta}_3+k_4\boldsymbol{\beta}_4=0$，即

即$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)+k_3(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)+k_3(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4)=0$,

$(k_1+k_2+k_3+k_4)\boldsymbol{\alpha}_1+(k_2+k_3+k_4)\boldsymbol{\alpha}_2+(k_3+k_4)\boldsymbol{\alpha}_3+k_4\boldsymbol{\alpha}_4=0$,

由于$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_4$线性无关，则必有$\begin{cases}k_1+k_2+k_3+k_4=0\\k_2+k_3+k_4=0\\k_3+k_4=0\\k_4=0\end{cases}$，解得：

$$k_1=k_2=k_3=k_4=0,$$

故向量组$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$也线性无关.

全国2014年10月高等教育自学考试线性代数（经管类）试题参考答案

一、单项选择题（本大题共10小题，每小题2分，共20分）

1．D　2．A　3．C　4．B　5．C

二、填空题（本大题共10小题，每小题2分，共20分）

6．5　7．$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$　8．$-\dfrac{1}{4}$　9．$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \dfrac{3}{2} & 2 \end{pmatrix}$　10．$\boldsymbol{\alpha}_3=-\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2$

11．-1　12．1　13．$-\dfrac{3}{2}$　14．$\boldsymbol{E}$　15．$0<t<1$

三、计算题（本大题共6小题，每小题9分，共54分）

16．解：

$$D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & -8 & -3 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} -8 & -3 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} -8 & -3 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ -3 & -8 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -8 & -3 \\ -3 & -8 \end{vmatrix}=55.$$

17．解：$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} a^3 & a^2 & a & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ a^2 & a & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ a & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ a^2 & a & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ a^3 & a^2 & a & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -a \\ 0 & a & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -a^2 \\ 0 & a^2 & a & 1 & 1 & 0 & 0 & -a^3 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -a & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1 & 0 & -a^2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -a & 0 & 0 \end{array}\right)，\text{从而 } A^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -a \\ 0 & 1 & -a & 0 \\ 1 & -a & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

18．解：由 $\boldsymbol{AX}+\boldsymbol{E}=\boldsymbol{A}^3+\boldsymbol{X}$，得 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^3-\boldsymbol{E}$．

又由$A-E=\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-1&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$可逆,

由$(A-E)X=A^3-E$，可得$(A-E)X=(A-E)(A^2+A+E)$,

两边左乘$(A-E)^{-1}$，得到

$$X=A^2+A+E=\begin{pmatrix}0&-1&2\\2&0&1\\1&2&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-2&3\\3&2&1\\1&3&3\end{pmatrix}.$$

19．解：设$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=\beta$，该线性方程组的增广矩阵为

$$\bar{A}=\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&k+1&k^2+1\\1&2&1&1\\1&1&k&1\\1&1&k+1&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&k+1&k^2+1\\0&1&-k&-k^2\\0&0&-1&-k^2\\0&0&0&-k^2\end{array}\right)$$

由于β能有$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表出，则必有$\mathrm{r}(\bar{A})=\mathrm{r}(A)=3$,

此时$k=0$，方程组有唯一解$x_1=1,x_2=x_3=0$,

表示式为$\beta=\alpha_1$.

20．解：方程组的增广矩阵

$$\bar{A}=\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&0\\0&1&2&2&1\\1&2&3&3&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&0\\0&1&2&2&1\\0&1&2&2&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&-1&-1&-1\\0&1&2&2&1\\0&0&0&0&0\end{array}\right)$$

可知$\mathrm{r}(\bar{A})=\mathrm{r}(A)=2<4$，方程组有无穷多解.

由同解方程组$\begin{cases}x_1=-1+x_3+x_4\\x_2=1-2x_3-2x_4\end{cases}$，求出方程组的一个特解$\eta^*=(-1,1,0,0)^{\mathrm{T}}$.

导出组的一个基础解系为$\xi_1=(1,-2,1,0)^{\mathrm{T}}$，$\xi_2=(1,-2,0,1)^{\mathrm{T}}$．从而方程组的通解为
$\eta=\eta^*+c_1\xi_1+c_2\xi_2=(-1,1,0,0)^{\mathrm{T}}+c_1(1,-2,1,0)^{\mathrm{T}}+c_2(1,-2,0,1)^{\mathrm{T}}$ (c_1,c_2为任意常数).

21．解：由条件可知矩阵A的特征值为$\lambda_1=1,\lambda_2=\lambda_3=2$,

由$|E-A|=\begin{vmatrix}0&1&-1\\-1&-2&1\\-x&-1&0\end{vmatrix}=x-1=0$，得$x=1$.

对于$\lambda_1=1$，由线性方程组$(E-A)x=0$求得一个特征向量为 $\alpha_1=(-1,1,1)^{\mathrm{T}}$;

对于$\lambda_2=\lambda_3=2$，由线性方程组$(2E-A)x=0$求得两个线性无关的特征向量为

$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(0,1,1)^{\mathrm{T}}$. 令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=\begin{pmatrix}-1&1&0\\1&0&1\\1&1&1\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$.

22．解：二次型的矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$.

由 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1&0&-1\\0&\lambda-2&0\\-1&0&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-2)^2\lambda=0$，得矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=2$，$\lambda_3=0$.

对于 $\lambda_1=\lambda_2=2$，求解齐次线性方程组 $(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})x=0$，得正交的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_1=(0,1,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$，将其单位化，得 $\boldsymbol{\gamma}_1=(0,1,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\gamma}_2=(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}})^{\mathrm{T}}$；

对于 $\lambda_3=0$，求解齐次线性方程组 $(-\boldsymbol{A})x=0$，得特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_3=(-1,0,1)^{\mathrm{T}}$，

将其单位化，得 $\boldsymbol{\gamma}_3=(-\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}})^{\mathrm{T}}$；

令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3)=\begin{pmatrix}0&1/\sqrt{2}&-1/\sqrt{2}\\1&0&0\\0&1/\sqrt{2}&1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{P}$ 为正交矩阵,

经正交变换 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$，化二次型为标准形 $2y_1^2+2y_2^2$.

四、证明题（本大题共 7 分）

23．证明：由于向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关，故存在不全为零的常数 k_1,k_2,k_3，使得 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3=0$．其中必有 $k_1\neq0$，否则，如果 $k_1=0$，

则上式化为 $k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3=0$，其中 k_2,k_3 不全为零,

由此推出 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关，与向量组中任意两个向量都线性无关的条件矛盾.

类似地，可证明 $k_2\neq0,k_3\neq0$.

故存在全不为零的常数 k_1,k_2,k_3 使得 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3=0$.

全国 2015 年 4 月高等教育自学考试线性代数（经管类）试题参考答案

一、单项选择题（本大题共 10 小题，每小题 2 分，共 20 分）

1．C　2．A　3．D　4．C　5．B

二、填空题（本大题共 10 小题，每小题 2 分，共 20 分）

6．9　7．$\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$　8．$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$　9．3　10．-2　11．0

12．2　13．$\frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,1)^{\mathrm{T}}$ 或 $-\frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,1)^{\mathrm{T}}$　14．-1　15．$a>1$

三、计算题（本大题共 6 小题，每小题 9 分，共 54 分）

16．解：

$$D=-\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 4 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 5 & 1 & 11 \\ -2 & 3 & -4 \\ -2 & 0 & 0 \end{vmatrix}=-2\begin{vmatrix} 1 & 11 \\ 3 & -4 \end{vmatrix}=74.$$

17．解：由于 $|\boldsymbol{A}|=\frac{1}{2}$，所以 $\boldsymbol{A}$ 可逆，于是 $\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$，

故 $\left|(2\boldsymbol{A})^{-1}+2\boldsymbol{A}^*\right|=\left|\frac{1}{2}\boldsymbol{A}^{-1}+2|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}\right|=\left|\frac{1}{2}\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{A}^{-1}\right|=\left|\frac{3}{2}\boldsymbol{A}^{-1}\right|=\left(\frac{3}{2}\right)^2\left|\boldsymbol{A}^{-1}\right|=\frac{9}{2}$

18．解：由 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{AX}+\boldsymbol{B}$，化为 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}$，

而 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 可逆，且 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$，

故 $\boldsymbol{X}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

19．解：由于 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)\rightarrow\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & -7 \\ 0 & -1 & -5 & 7 \end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix} 1 & 0 & -11 & 17 \\ 0 & 1 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

所以向量组的秩为 2，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是一个极大线性无关组，并且有

$\boldsymbol{\alpha}_3=-11\boldsymbol{\alpha}_1+5\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4=17\boldsymbol{\alpha}_1-7\boldsymbol{\alpha}_2$．（注：极大线性无关组不唯一）

20．解：方程组的系数行列式 $\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix}1 & a & a^2\\ 1 & b & b^2\\ 1 & c & c^2\end{vmatrix}=(b-a)(c-a)(c-b)$.

因为 a，b，c 两两互不相同，所以 $D\neq 0$，故方程有唯一解.

又 $D_1=\begin{vmatrix}3a^2 & a & a^2\\ 3b^2 & b & b^2\\ 3c^2 & c & c^2\end{vmatrix}=0$，$D_2=\begin{vmatrix}1 & 3a^2 & a^2\\ 1 & 3b^2 & b^2\\ 1 & 3c^2 & c^2\end{vmatrix}=0$，$D_3=\begin{vmatrix}1 & a & 3a^2\\ 1 & b & 3b^2\\ 1 & c & 3c^2\end{vmatrix}=3D$，

由克拉默法则得到方程组的解为 $x_1=\dfrac{D_1}{D}=0, x_2=\dfrac{D_2}{D}=0, x_3=\dfrac{D_3}{D}=\dfrac{3D}{D}=3$.

21．解：因为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，故 $\mathrm{tr}\boldsymbol{A}=\mathrm{tr}\boldsymbol{B}$ 且$|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|$，即$\begin{cases}1+3+1=0+1+b\\ (a-1)^2=0\end{cases}$，所以 $a=1$，$b=4$.

22．解：二次型的矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}5 & 2\\ 2 & 5\end{pmatrix}$.

由于 $|\boldsymbol{\lambda E}-\boldsymbol{A}|=(\boldsymbol{\lambda}-3)(\boldsymbol{\lambda}-7)$，所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\boldsymbol{\lambda}_1=3, \boldsymbol{\lambda}_2=7$.

对于特征值 $\lambda_1=3$，由方程组 $(3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=0$ 得到 $\boldsymbol{A}$ 属于特征值 $\lambda_1=3$ 的一个单位特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}$；

对于特征值 $\lambda_2=7$, 由方程组 $(7\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=0$ 得到 $\boldsymbol{A}$ 属于特征值 $\lambda_2=7$ 的一个单位特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_2=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$；

得正交矩阵 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$，作正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Qy}$,

二次型化为标准形 $f=3y_1^2+7y_2^2$.

四、证明题（本题 7 分）

23．证明：因为 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{E}$，所以 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}=\boldsymbol{B}$，又 $\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{B}$，故 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^2=\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$，

化简得 $\boldsymbol{A}^2-3\boldsymbol{A}=-2\boldsymbol{E}$，于是 $\boldsymbol{A}\left[-\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E})\right]=\boldsymbol{E}$，故 $\boldsymbol{A}$ 可逆.

全国2015年10月高等教育自学考试线性代数（经管类）试题参考答案

一、单项选择题（本大题共10小题，每小题2分，共20分）

1．B　　2．A　　3．D　　4．B　　5．C

二、填空题（本大题共10小题，每小题2分，共20分）

6．0　　7．$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$　　8．$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$　　9．$\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3$　　10．$k\neq\dfrac{2}{3}$

11．-2　　12．-5　　13．4　　14．$(2,2,1)^{\mathrm{T}}$　　15．$z_1^2-z_2^2$

三、计算题（本大题共6小题，每小题9分，共54分）

16．解：$\begin{vmatrix} 1 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 2^2 & 3^2 & 4^2 & 5^2 \\ 3^2 & 4^2 & 5^2 & 6^2 \\ 4^2 & 5^2 & 6^2 & 7^2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \\ 5 & 7 & 7 & 11 \\ 7 & 9 & 11 & 13 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}=0$．

17．解：法一：将等式$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{X}$整理为$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}$，

由于$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$可逆，且$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$，

得到$\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -4 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$．

法二：将等式$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{X}$整理为$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}$，且$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，从而

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E},\boldsymbol{B})=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & -3 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & -8 & -6 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}，所以\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -4 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

18．解：(1) $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0 & -r & -s\\ 0 & 0 & -t\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix}0 & 0 & rt\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，由此可得

$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix}1 & -r & rt-s\\ 0 & 1 & -t\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}^3=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$；

(2) $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\boldsymbol{E}$．

19．解：由$(\boldsymbol{\alpha}_1，\boldsymbol{\alpha}_2，\boldsymbol{\alpha}_3，\boldsymbol{\alpha}_4)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 2 & 0\\ 2 & 2 & 1 & 3\\ 1 & 2 & 1 & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & -1 & -1\end{pmatrix}$

$\to\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，可知该向量组的秩为 3，$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 为一个极大无关组，并且有 $\boldsymbol{\alpha}_4=2\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$（极大线性无关组不唯一）．

20．解：对方程组的增广矩阵施行初等行变换

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 1\\ -1 & 1 & -1 & -2\\ 2 & -1 & a+2 & 3\\ 1 & 1 & 3 & b\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 1 & -1\\ 0 & -1 & a-2 & 1\\ 0 & 1 & 1 & b-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 1 & -1\\ 0 & & a-1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & b\end{pmatrix},$$

因此，当 $a=1,\ b=0$ 时，$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=2<3$，方程组有无穷多解.

同解方程组为$\begin{cases}x_1+2x_3=1\\ x_2+x_3=-1\end{cases}$，即$\begin{cases}x_1=1-2x_3\\ x_2=-1-x_3\end{cases}$，$x_3$ 为自由未知量，令 $x_3=0$，得到特解 $\boldsymbol{\eta}^*=(1,-1,0)^{\mathrm{T}}$；对应导出组为$\begin{cases}x_1=-2x_3\\ x_2=-x_3\end{cases}$，令 $x_3=-1$，得一个基础解系为 $\boldsymbol{\xi}=(2,1,-1)^{\mathrm{T}}$，

从而方程组的通解为$\boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{\eta}^*+k\boldsymbol{\xi}=(1,-1,0)^{\mathrm{T}}+k(2,1,-1)^{\mathrm{T}}$，其中 k 为任意常数.

21．解：由

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -2 & -2\\ -2 & \lambda-1 & -2\\ -2 & -2 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-5)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ -2 & \lambda-1 & -2\\ -2 & -2 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-5)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & \lambda+1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda+1\end{vmatrix}$$

$=(\lambda+1)^2(\lambda-5)=0$，得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=-1$，$\lambda_3=5$.

对于 $\lambda_1=\lambda_2=-1$，求解齐次线性方程组 $(-\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=0$，得基础解系 $\boldsymbol{p}_1=(-1,1,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{p}_2=(-1,0,1)^{\mathrm{T}}$，从而 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 $\lambda_1=\lambda_2=-1$ 的全部特征向量为

$k_1\ \boldsymbol{p}_1+k_2\ \boldsymbol{p}_2$，其中 k_1，k_2 为不全为零的任意常数；

对于 $\lambda_3=5$，求解齐次线性方程组 $(5\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=0$，得基础解系 $\boldsymbol{p}_3=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$，

从而 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 $\lambda_3=5$ 的全部特征向量为 $k_3\ \boldsymbol{p}_3$，其中 k_3 是不为零的任意常数.

22．解：$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-x_1x_2+x_2x_3=x_1^2-x_1x_2+\dfrac{1}{4}x_2^2-\dfrac{1}{4}x_2^2+x_2x_3-x_3^2+x_3^2$

$$=(x_1-\frac{1}{2}x_2)^2-(\frac{1}{2}x_2-x_3)^2+x_3^2,$$

令 $\begin{cases} y_1=x_1-\dfrac{1}{2}x_2 \\ y_2=\dfrac{1}{2}x_2-x_3 \\ y_3=x_3 \end{cases}$，即经可逆线性变换 $\begin{cases} x_1=y_1+y_2+y_3 \\ x_2=2y_2+2y_3 \\ x_3=y_3 \end{cases}$，可将原二次型化标准形 $y_1^2-y_2^2+y_3^2$.

四、证明题（本题 7 分）

23．证明：$\boldsymbol{\alpha}_3$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表出，知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表出，

故 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\le r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)\le 2$，又 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=2$，从而必有 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)=2$，即 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关，

所以 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$ 是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 的一个极大线性无关组.

全国 2016 年 4 月高等教育自学考试线性代数（经管类）试题参考答案

一、单项选择题（本大题共 10 小题，每小题 2 分，共 20 分）

1．D　2．A　3．C　4．C　5．B

二、填空题（本大题共 10 小题，每小题 2 分，共 20 分）

6．0　7．-1　8．$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$　9．$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$　10．$\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$　11．1

12．2　　13．3　　14．5　　15. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$

三、计算题（本大题共 7 小题，每小题 9 分，共 63 分）

16．解：

$$\boldsymbol{D}=a_2\begin{vmatrix} a_1 & c_1 & 0 \\ d_1 & b_1 & 0 \\ 0 & 0 & b_2 \end{vmatrix}-d_2\begin{vmatrix} 0 & 0 & c_2 \\ a_1 & c_1 & 0 \\ d_1 & b_1 & 0 \end{vmatrix}=a_2b_2\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ d_1 & b_1 \end{vmatrix}-d_2c_2\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ d_1 & b_1 \end{vmatrix}=(a_1b_1-c_1d_1)(a_2b_2-d_2c_2)$$

17．解：由于 $|\boldsymbol{C}|=-1\neq 0$ 所以 $\boldsymbol{C}$ 可逆．又 $\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{CB}$，所以 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{CBC}^{1}$

做 $$(\boldsymbol{C}\ \vdots\ \boldsymbol{E})=\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

得 $\boldsymbol{C}^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 所以 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{CBC}^{1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -4 & 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 6 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

$$\boldsymbol{A}^3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 6 & -1 & -1 \end{pmatrix}^3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 6 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

18．解：设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ 根据题意 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}$ 又根据题意

$\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{11}+a_{13} \\ a_{22} & a_{21} & a_{21}+a_{23} \\ a_{32} & a_{31} & a_{31}+a_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 对应得 $\begin{cases} a_{12}=a_{21}=a_{33}=1 \\ a_{11}=a_{13}=a_{22}=a_{31}=a_{32}=0 \\ a_{23}=-1 \end{cases}$ 得

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

19．解：$(\boldsymbol{\alpha}_1\quad \boldsymbol{\alpha}_2\quad \boldsymbol{\alpha}_3\quad \boldsymbol{\alpha}_4)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \\ 4 & 2 & 6 & 6 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是一个极大线性无关组，并且有 $\boldsymbol{\alpha}_3=2\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$（注：极大线性无关组不唯一）

20．解：

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}1&1&-2&1\\1&-2&1&1\\-2&1&1&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-2&1\\0&-3&3&0\\0&3&-3&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-2&1\\0&1&-1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1&1\\0&1&-1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

得$\begin{cases}x_1=1+x_3\\x_2=x_3\end{cases}$ x_3为自由量．令$x_3=0$得特解$\eta^*=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

导出组 $\boldsymbol{AX}$=0 的解为$\begin{cases}x_1=x_3\\x_2=x_3\end{cases}$ x_3为自由量．令$x_3=1$得$\xi=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

得通解$\eta=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ k为任意实数

21．解：$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-3&2\\2&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-4)(\lambda+1)$所以$\boldsymbol{A}$得特征值为$\lambda_1=4.\lambda_2=-1$

对于特征值$\lambda_1=4$，由方程组$(4\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=0$得到$p_1=\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$

对于特征值$\lambda_2=-1$，由方程组$(-\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=0$得到$p_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$

将$\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2$单位化得$\alpha_1=\begin{pmatrix}-\frac{2}{\sqrt{5}}\\\frac{1}{\sqrt{5}}\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}\\\frac{2}{\sqrt{5}}\end{pmatrix}$得正交矩阵$\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}-\frac{2}{\sqrt{5}}&\frac{1}{\sqrt{5}}\\\frac{1}{\sqrt{5}}&\frac{2}{\sqrt{5}}\end{pmatrix}$使$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{AQ}$为对角矩阵

22．解：由于α是$\boldsymbol{A}$的一个特征向量，所以$\boldsymbol{A}\alpha=\lambda_i\alpha$

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-2&-1\\-2&\lambda-1&-1\\-1&-1&\lambda-2\end{vmatrix}=$$

$$(\lambda-4)\begin{vmatrix}1&1&1\\-2&\lambda-1&-1\\-1&-1&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-4)\begin{vmatrix}1&1&1\\0&\lambda+1&1\\0&0&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-4)(\lambda-1)(\lambda+1)$$

所以$\boldsymbol{A}$得特征值为$\lambda_1=4.\lambda_2=1,\lambda_3=-1$

$\lambda_1=4$时，$\boldsymbol{A}\alpha=4\alpha$，无解．$\lambda_2=1$时，$\boldsymbol{A}\alpha=\alpha$，无解．$\lambda_3=-1$时，$\boldsymbol{A}\alpha=-\alpha$，得$k=0$

四、证明题（本题 7 分）

23．证明：$(2\boldsymbol{A})^{*}=|2\boldsymbol{A}|(2\boldsymbol{A})^{-1}=2^{3}|\boldsymbol{A}|\bullet\frac{1}{2}\boldsymbol{A}^{-1}=4|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}=4\boldsymbol{A}^{*}$

全国 2016 年 10 月高等教育自学考试线性代数（经管类）试题参考答案

一、单项选择题（本大题共 10 小题，每小题 2 分，共 20 分）

1．A　2．B　3．A　4．A　5．A

二、填空题（本大题共 10 小题，每小题 2 分，共 20 分）

6．-5　7．-1　8．$\begin{pmatrix}2&-1&1\\0&0&0\\-2&1&-1\end{pmatrix}$　9．$\begin{pmatrix}4&3\\2&1\end{pmatrix}$　10．$\beta=\frac{1}{2}\alpha_1+\frac{1}{2}\alpha_2$

11．-1　12．-2　13．1　14．0　15．$f=-y_1^2$

三、计算题（本大题共 7 小题，每小题 9 分，共 63 分）

16．解：

$$D=\begin{vmatrix}a_1&a_1-b_2&a_1-b_3\\a_2&a_2-b_2&a_2-b_3\\a_3&a_3-b_2&a_3-b_3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}-b_1&a_1-b_2&a_1-b_3\\-b_1&a_2-b_2&a_2-b_3\\-b_1&a_3-b_2&a_3-b_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_1&a_1&a_1-b_3\\a_2&a_2&a_2-b_3\\a_3&a_3&a_3-b_3\end{vmatrix}+\left\|\begin{matrix}a_1&-b_2&a_1-b_3\\a_2&-b_2&a_2-b_3\\a_3&-b_2&a_3-b_3\end{matrix}\right\|+\begin{vmatrix}-b_1&a_1&a_1-b_3\\-b_1&a_2&a_2-b_3\\-b_1&a_3&a_3-b_3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}-b_1&-b_2&a_1-b_3\\-b_1&-b_2&a_2-b_3\\-b_1&-b_2&a_3-b_3\end{vmatrix}$$

$$=0+\left\|\begin{matrix}a_1&-b_2&a_1\\a_2&-b_2&a_2\\a_3&-b_2&a_3\end{matrix}\right\|+\left\|\begin{matrix}a_1&-b_2&-b_3\\a_2&-b_2&-b_3\\a_3&-b_2&-b_3\end{matrix}\right\|+\begin{vmatrix}-b_1&a_1&a_1\\-b_1&a_2&a_2\\-b_1&a_3&a_3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}-b_1&a_1&-b_3\\-b_1&a_2&-b_3\\-b_1&a_3&-b_3\end{vmatrix}+0=0$$

17．解：$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}3&2&1\\2&1&0\\1&0&0\end{vmatrix}=(-1)^{\frac{3*2}{2}}*1=-1$

$A_{11}=0,A_{12}=0,A_{13}=-1,A_{21}=0;A_{22}=-1,A_{23}=0,A_{31}=-1,A_{32}=2,A_{33}=-1$

所以得 $\boldsymbol{A}^{*}=\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&-1&2\\-1&2&-1\end{pmatrix},\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^{*}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&-2\\1&-2&1\end{pmatrix}$

18. 解：设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$ 根据题意 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\2a_{11}+a_{31}&2a_{12}+a_{32}&2a_{13}+a_{33}\end{pmatrix}$ 又

根据题意

$$\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{12} \\ a_{21} & a_{23} & a_{22} \\ 2a_{11}+a_{31} & 2a_{13}+a_{33} & 2a_{12}+a_{32} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$对应得

$$\begin{cases} a_{11}=a_{23}=a_{32}=1 \\ a_{12}=a_{13}=a_{21}=a_{22}=a_{33}=0 \\ a_{31}=-2a_{11} \end{cases}$$

得 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

19．解：

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5)=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & -3 & 2 & -9 & 0 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$得向量组的秩为 3， $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是一个极大线性无关组，并且有

$\boldsymbol{\alpha}_4=-\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_3 \quad \boldsymbol{\alpha}_5=-\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$（注：极大线性无关组不唯一）

20．解：$\overline{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -3 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & -2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & -6 & -5 \\ -1 & 2 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$\to\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$得$\begin{cases} x_1=1+2x_4 \\ x_2=3-x_4 \\ x_3=-1 \end{cases}$ x_4

为自由量.

令 $x_4=0$ 得特解 $\eta^*=\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$，导出组 $\boldsymbol{AX}=0$ 的解为$\begin{cases} x_1=2x_4 \\ x_2=-x_4 \\ x_3=0 \end{cases}$ x_3 为自由量．令 $x_4=1$ 得

$$\xi=\begin{pmatrix}2\\-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

得通解$\eta=\begin{pmatrix}1\\3\\-1\\0\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}2\\-1\\0\\1\end{pmatrix}$ k为任意实数.

21．解：$\boldsymbol{A}$为3阶阵，设$\boldsymbol{A}$的另一个特征值为λ_3，$r(\boldsymbol{A})$=2 所以$|\boldsymbol{A}|=0=\lambda_1\lambda_2\lambda_3$．因为$\lambda_1=-1,\lambda_2=1$

所以$\lambda_3=0$．设$\lambda_3=0$时的特征向量为$(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$．因为属于不同特征值的特征向量必正交.

所以$\begin{cases}x_1-x_3=0\\x_1+x_3=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=0\\x_3=0\end{cases}$ $x_2\neq0$，所以属于$\lambda_3=0$的特征向量为$(0,a,0)^{\mathrm{T}}$ $(a\neq0)$

22．解：$f=x_1^2+x_2^2-2x_1x_2$的对称矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}$

$|\lambda\boldsymbol{E}_2-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1&1\\1&\lambda-1\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-2)$，所以$\lambda_1=0,\lambda_2=2$

$\lambda_1=0,$由方程组$-\boldsymbol{AX}=0$得$\boldsymbol{p}_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ $\lambda_2=2$时，由方程组$(2\boldsymbol{E}_2-\boldsymbol{A})x=0$得$p_2=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$

$\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2$正交，将$\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2$单位化. $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}\\\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}\\\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}$，故作正交变换

$$\boldsymbol{x}=py=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}&-\frac{1}{\sqrt2}\\\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}\boldsymbol{y}$$

得标准形$f=2y_1^2$

四、证明题（本题7分）

23．证明：因为$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$是$\boldsymbol{AX}=0$的基础解系，即是$\boldsymbol{AX}=0$的解．所以$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_2=2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$也是$\boldsymbol{AX}=0$的解.

设$\exists k_1,k_2,k_3,$使$k_1\boldsymbol{\beta}_1+k_2\boldsymbol{\beta}_2=0$即$(k_1+2k_2)\boldsymbol{\alpha}_1+(2k_1+k_2)\boldsymbol{\alpha}_2=0$

因为$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$线性无关，所以$\begin{cases}k_1+2k_2=0\\2k_1+k_2=0\end{cases}\Rightarrow k_1=k_2=0$，所以$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$线性无关，也是$\boldsymbol{AX}=0$基础解系.

全国2017年4月高等教育自学考试线性代数（经管类）试题参考答案

一、单项选择题（本大题共10小题，每小题2分，共20分）

1．C　2．B　3．A　4．D　5．D

二、填空题（本大题共10小题，每小题2分，共20分）

6．8　7．-2　8．-36　9．$\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\boldsymbol{A}^{-1} & 0\\ 0 & \boldsymbol{B}^{-1}\end{pmatrix}$　10．2　11．$k(2,1,1)^{\mathrm{T}}$

12．$a+2b=c$　13．100　14．$-\frac{3}{2}$　15．$\begin{pmatrix}0 & 1/2 & 0\\ 1/2 & 0 & 1/2\\ 0 & 1/2 & 0\end{pmatrix}$

三、计算题（本大题共7小题，每小题9分，共63分）

16．解：

$$D=-\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1-y\\ 1 & 1-x & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1+y & 1\\ 1+x & 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1-y\\ 0 & -x & 0 & y\\ 0 & 0 & y & y\\ 0 & -x & -x & y-x+xy\end{vmatrix}=-y\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1-y\\ 0 & -x & 0 & y\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & -x & -x(1-y)\end{vmatrix}$$

$$=xy\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1-y\\ 0 & -x & 0 & y\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & -y\end{vmatrix}=x^2y^2.$$

17．解：$\boldsymbol{A}^2-3\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & -2 & 2\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$

18．解：由题知$(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$，

$$(A-2E,E)=\begin{pmatrix}1&0&1&3&0&1\\1&-1&0&1&1&0\\0&1&2&0&1&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1&3&0&1\\0&-1&-1&-2&1&-1\\0&1&2&0&1&4\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&1&3&0&1\\0&1&1&2&-1&1\\0&0&1&-2&2&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&5&-2&-2\\0&1&0&4&-3&-2\\0&0&1&-2&2&3\end{pmatrix}，得$$

$$B=\begin{pmatrix}5&-2&-2\\4&-3&-2\\2&2&3\end{pmatrix}$$

19．解：$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\begin{pmatrix}1&0&1&2\\2&3&-2&3\\1&-1&8&8\\4&-3&8&9\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1&2\\0&3&-4&-1\\0&-1&7&6\\0&-3&4&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1&2\\0&1&-7&-6\\0&3&-4&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

$\to\begin{pmatrix}1&0&1&2\\0&1&-7&-6\\0&0&17&17\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1&2\\0&1&-7&-6\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是一个极大线性无关组，并且有 $\alpha_4=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$（注：极大线性无关组不唯一）．

20．解 $\overline{A}=\begin{pmatrix}-1&-4&1&1\\0&k&-3&3\\1&3&k+1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1&-4&1&1\\0&k&-3&3\\0&-1&k+2&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&4&-1&-1\\0&-1&k+2&1\\0&k&-3&-3\end{pmatrix}$

$\to\begin{pmatrix}1&4&-1&-1\\0&-1&k+2&1\\0&0&k^2+2k-3&k+3\end{pmatrix}$

（1）$r(A)=r(\overline{A})=3$ 时，有唯一解，得 $k^2+2k-3\neq0$ 即 $k\neq-3,k\neq1$ 时，有唯一解

（2）$k=1$ 时 $\overline{A}=\begin{pmatrix}-1&-4&-1&-1\\0&-1&3&1\\0&0&0&4\end{pmatrix}$　　$r(A)<r(\overline{A})$ 无解

（3）$k=-3$ 时 $\overline{A}=\begin{pmatrix}-1&-4&-1&-1\\0&-1&-1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-5&3\\0&1&1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ 得 $\begin{cases}x_1=5x_3+3\\x_2=-x_3-1\end{cases}$ x_3 为自由量.

令 $x_3=0$ 得 $\eta^*=\begin{pmatrix}3\\-1\\0\end{pmatrix}$．导出组 $AX=0$ 的解为 $\begin{cases}x_1=5x_3\\x_2=-x_3\end{cases}$，$x_3$ 为自由量，令 $x_3=1$ 得

$$\boldsymbol{\xi}=\begin{pmatrix}5\\-1\\1\end{pmatrix}$$

得通解$\boldsymbol{\eta}=\begin{pmatrix}3\\-1\\0\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}5\\-1\\1\end{pmatrix}$, k为任意实数.

21．解：

（1）$\because A$与B相似，$\therefore |\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|$即$-2=-2y\Rightarrow y=1$又$\because tr\boldsymbol{A}=tr\boldsymbol{B}\therefore 2+x=2\Rightarrow x=0$

（2）$\boldsymbol{A}$的特征值与$\boldsymbol{B}$相同，为$\lambda_1=2,\lambda_2=1,\lambda_3=-1$

$\lambda_1=2$, 由方程组$(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=0$，得基础解系$\boldsymbol{p}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\lambda_2=1$，由方程组$(E-A)x=0$，

得基础解系$\boldsymbol{p}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$

$\lambda_3=-1$, 由方程组$(-\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=0$, 得基础解系$\boldsymbol{p}_3=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$得可逆矩阵$\boldsymbol{p}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&1&-1\end{pmatrix}$,

使$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$

22．解：$f=5x_1^2-4x_1x_2+5x_2^2$的对称矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}5&-2\\-2&5\end{pmatrix}$

$|\lambda\boldsymbol{E}_2-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-5&2\\2&\lambda-5\end{vmatrix}=(\lambda-3)(\lambda-7)$，所以$\lambda_1=3,\lambda_2=7$

$\lambda_1=3$, 由方程组$(3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=0$，得$\boldsymbol{p}_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$，$\lambda_2=7$时，由方程组$(7\boldsymbol{E}_2-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=0$得

$\boldsymbol{p}_2=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$

$\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2$正交，将$\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2$单位化．$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$，故作正交变换

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\boldsymbol{y}$$

得标准形 $f=3y_1^2+7y_2^2$

四、证明题（本题 7 分）

23．证明：因为 $\boldsymbol{\beta}_1$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表出，故设 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ （$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2$ 不全为零），

因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关，$\boldsymbol{\beta}_2$ 不可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表出，故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_2$ 线性无关.

设 $\exists k_1,k_2,k_3$，使 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3(\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2)=0$ 即 $(k_1+k_3\boldsymbol{a}_1)\boldsymbol{\alpha}_1+(k_2+k_3\boldsymbol{a}_2)\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\beta}_2=0$

因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_2$ 线性无关，所以 $\begin{cases}k_1+k_3\boldsymbol{a}_1=0\\ k_2+k_3\boldsymbol{a}_2=0\\ k_3=0\end{cases}\Rightarrow k_1=k_2=k_3=0$，所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2$ 线性无关.