普通高等学校工科类·经管类数学深化训练与考研辅导丛书
考研首轮基础复习优选图书

线性代数
深化训练与考研指导

（工科类·经管类）

刘　强　丛书主编
孙　阳　郭文英　刘　强　孙激流　编著

電子工業出版社
Publishing House of Electronics Industry
北京·BEIJING

内 容 简 介

本书是作者在多年本科教学和考研辅导经验的基础上编写而成的. 全书共分为 6 章，每章包括 5 个模块，即知识要点、典型例题分析、深化训练、深化训练详解及综合提高训练. 本书编写的主要目的有两个：一是为了满足学生报考研究生的需要；二是帮助学有余力的在校学生更好地学习“线性代数”课程，开阔学习视野，拓展解题思路。本书编写紧扣“数学一”和“数学三”考研大纲，贴切考试实际，做到分门别类，详略得当，帮助考生在短时间内迅速掌握各种解题方法和技巧，提高综合分析问题、解决问题的能力，以达到融会贯通、举一反三的学习效果.

本书既可以作为普通高等学校工科类、经管类本科生学习“线性代数”课程的深化训练用书，也可以作为全国硕士研究生统一入学考试的辅导用书.

图书在版编目（CIP）数据

线性代数深化训练与考研指导 / 孙阳等编著. —北京：电子工业出版社，2017.4

ISBN 978-7-121-31150-5

I. ①线… II. ①孙… III. ①线性代数－高等学校－教学参考资料 IV. ①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2017）第 057524 号

策划编辑：王二华
责任编辑：王二华
印　　刷：
装　　订：
出版发行：电子工业出版社
　　　　　北京市海淀区万寿路 173 信箱　　邮编　100036
开　　本：787×1092　1/16　印张：12　　字数：310 千字
版　　次：2017 年 4 月第 1 版
印　　次：2017 年 4 月第 1 次印刷
定　　价：36.00 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题，请向购买书店调换。若书店售缺，请与本社发行部联系，联系及邮购电话：（010）88254888，88258888。

质量投诉请发邮件至 zlts@phei.com.cn，盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

本书咨询联系方式：（010）88254532。

前　　言

为了更好地帮助普通高等学校工科类、经管类本科生学好大学数学，同时为了满足众多学生考研的需要，我们结合多年的考研辅导经验，编写了“高等学校工科类、经管类数学深化训练与考研辅导丛书”，该丛书包括微积分、高等数学、线性代数和概率论与数理统计四门数学课程的辅导用书，由首都经济贸易大学的刘强教授担任丛书主编.

本书为线性代数分册，内容涵盖了考研“数学一”和“数学三”的全部考点. 本书编写的主要目的有两个：一是帮助学有余力的在校学生更好地学习“线性代数”课程，以开阔学习视野，拓展解题思路；二是为了满足学生报考研究生的需要. 本书编写紧扣“数学一”和“数学三”考研大纲，贴切考试实际，做到分门别类、详略得当，使考生能在短时间内迅速掌握各种解题方法和技巧，综合分析问题、解决问题的能力得到有效提升，达到融会贯通、举一反三的学习效果.

全书共分为 6 章，每章包括 5 个模块，即知识要点、典型例题分析、深化训练、深化训练详解及综合提高训练. 具体模块内容介绍如下.

一、**知识要点**：本模块对基本概念、基本理论、基本公式等内容进行系统梳理，方便读者查阅相关内容.

二、典型例题分析：本模块是作者在多年来考研辅导经验的基础上，创新性地构思了大量有代表性的例题，并选编了部分国内外优秀教材、辅导资料的经典题目，汇集了一些有代表性的考研真题，按照知识结构、解题思路、解题方法等对典型例题进行了系统归类，通过专题讲解，详细阐述了相关问题的解题方法与技巧.

三、深化训练：本模块精心选编了部分具有代表性的习题及历年的考研真题，帮助读者巩固强化所学知识，提升读者学习效果，做到融会贯通和举一反三.

四、深化训练详解：本模块对深化训练习题给出了详细的解答过程，部分习题给出多种解法，以开拓读者的解题思路，培养读者的分析能力和发散思维.

五、综合提高训练：本模块的例题综合性较强，有较高的难度和较强的灵活性，通过本模块的学习，提升读者的综合能力和应变能力.

为了便于读者阅读本书，书中的“数学一”要求、“数学三”不要求的内容将用“*”标出，有一定难度的结论、例题和综合练习题等将用“**”标出. 另外为了方便读者查阅，本书在考研真题后面加上了标志，例如【2010（1）】表示该题是 2010 年硕士研究生入学考试“数学一”考题，【2010（1，3）】表示该题是 2010 年“数学一”和“数学三”考题等.

本丛书在编写过程中，得到了北京工商大学曹显兵教授，北京工业大学李高荣教授，北方工业大学刘喜波教授，昆明理工大学吴刘仓教授，北京化工大学李志强副教授，首都经济贸易大学张宝学教授、马立平教授、任韬副教授及同事们的大力支持，电子工业出版

社高等教育分社的谭海平社长和王二华编辑也为丛书的出版付出了很多的努力，在此表示诚挚的感谢.

由于作者水平有限，书中仍可能存在不妥甚至错误之处，恳请读者和同行们不吝指正. 邮件地址为：cuebliuqiang@163.com.

作　者

2017 年 3 月

目　　录

第 1 章　行列式…… 1
1.1　知识要点…… 1
1.1.1　排列…… 1
1.1.2　对换…… 1
1.1.3　n 阶行列式…… 1
1.1.4　行列式的性质…… 2
1.1.5　余子式、代数余子式…… 2
1.1.6　行列式展开定理…… 2
1.1.7　特殊的行列式的计算…… 3
1.2　典型例题分析…… 4
1.2.1　题型一、排列问题…… 4
1.2.2　题型二、利用定义计算行列式…… 4
1.2.3　题型三、利用性质计算行列式…… 5
1.2.4　题型四、行列式按行或列展开…… 8
*1.2.5　题型五、行列式按拉普拉斯方法展开…… 13
1.3　深化训练…… 13
1.4　深化训练详解…… 17
1.5　综合提高训练…… 23
第 2 章　矩阵…… 28
2.1　知识要点…… 28
2.1.1　矩阵的概念…… 28
2.1.2　矩阵的运算…… 28
2.1.3　伴随矩阵…… 29
2.1.4　可逆矩阵…… 29
2.1.5　矩阵分块…… 30
2.1.6　分块矩阵的运算…… 31
2.1.7　线性方程组…… 31
2.2　典型例题分析…… 32
2.2.1　题型一、矩阵的乘法及乘法的运算规律…… 32
2.2.2　题型二、伴随矩阵的相关问题…… 35
2.2.3　题型三、矩阵可逆的判定及逆矩阵的求法…… 36
2.2.4　题型四、矩阵的分块及分块运算…… 41

2.2.5 题型五、矩阵方程的求解 …… 43
2.2.6 题型六、克莱姆法则的应用 …… 44
2.3 深化训练 …… 46
2.4 深化训练详解 …… 48
2.5 综合提高训练 …… 53
第 3 章 矩阵的初等变换与线性方程组 …… 56
3.1 知识要点 …… 56
3.1.1 矩阵的初等变换与初等矩阵 …… 56
3.1.2 矩阵的秩 …… 56
3.1.3 用初等变换求逆矩阵及解矩阵方程 …… 57
3.1.4 线性方程组解的判定定理 …… 57
3.2 典型例题分析 …… 58
3.2.1 题型一、矩阵的初等变换问题 …… 58
3.2.2 题型二、矩阵的秩的求解 …… 59
3.2.3 题型三、利用初等变换求矩阵的逆矩阵 …… 60
3.2.4 题型四、线性方程组的求解 …… 61
3.3 深化训练 …… 63
3.4 深化训练详解 …… 67
3.5 综合提高训练 …… 73
第 4 章 向量组的线性相关性 …… 76
4.1 知识要点 …… 76
4.1.1 向量的线性组合（线性表示） …… 76
4.1.2 向量组的线性相关性 …… 76
4.1.3 向量组的极大线性无关组的定义与性质 …… 77
4.1.4 线性方程组解的结构 …… 77
4.1.5 向量空间的概念与性质 …… 78
4.2 典型例题分析 …… 79
4.2.1 题型一、向量线性表示的相关问题 …… 79
4.2.2 题型二、向量组的线性相关性问题 …… 80
4.2.3 题型三、极大线性无关组及秩的求解 …… 82
4.2.4 题型四、线性方程组解的相关问题 …… 84
4.2.5 题型五、向量空间的相关问题 …… 92
4.3 深化训练 …… 93
4.4 深化训练详解 …… 100
4.5 综合提高训练 …… 113
第 5 章 特征值与特征向量、相似矩阵 …… 128
5.1 知识要点 …… 128

5.1.1 向量的内积、长度及夹角 …… 128
5.1.2 正交向量组 …… 128
5.1.3 正交矩阵及正交变换 …… 129
5.1.4 矩阵的迹 …… 129
5.1.5 矩阵的特征值与特征向量 …… 130
5.1.6 相似矩阵 …… 130
5.1.7 一般矩阵的对角化 …… 131
5.1.8 实对称矩阵的对角化 …… 131
5.2 典型例题分析 …… 132
5.2.1 题型一、向量的内积、长度及正交问题 …… 132
5.2.2 题型二、正交矩阵问题 …… 133
5.2.3 题型三、特征值与特征向量问题的计算 …… 133
5.2.4 题型四、特征值与特征向量的证明问题 …… 134
5.2.5 题型五、相似矩阵问题 …… 135
5.2.6 题型六、对称矩阵的对角化问题 …… 138
5.3 深化训练 …… 141
5.4 深化训练详解 …… 142
5.5 综合提高训练 …… 146
第 6 章 二次型 …… 151
6.1 知识要点 …… 151
6.1.1 二次型及其矩阵表示 …… 151
6.1.2 二次型的标准形与规范形 …… 151
6.1.3 矩阵的合同 …… 152
6.1.4 利用正交变换化二次型为标准形 …… 152
6.1.5 用配方法化二次型成标准型 …… 153
6.1.6 惯性定理 …… 153
6.1.7 正定二次型与正定矩阵 …… 154
6.1.8 顺序主子式 …… 154
6.2 典型例题分析 …… 154
6.2.1 题型一、二次型的基本概念问题 …… 154
6.2.2 题型二、将二次型化为标准型 …… 155
6.2.3 题型三、二次型的规范形的求解 …… 157
6.2.4 题型四、矩阵的合同、相似问题 …… 158
6.2.5 题型五、二次型（或二次型矩阵）正定性的判定 …… 159
6.2.6 题型六、二次型的参数求解问题 …… 159
6.2.7 题型七、二次型（二次型矩阵）的证明问题 …… 160
6.3 深化训练 …… 160
6.4 深化训练详解 …… 162

6.5 综合提高训练 ······ 165
2013 年考研试题线性代数考题 ······ 169
2014 年考研试题线性代数考题 ······ 172
2015 年考研试题线性代数考题 ······ 174
2016 年考研试题线性代数考题 ······ 178
2017 年考研试题线性代数考题 ······ 182
参考文献 ······ 184

第 1 章　行　列　式

1.1　知 识 要 点

1.1.1　排列

把 n 个不同的元素排成一排，叫做这 n 个元素的**全排列**，简称**排列**，n 个不同元素的所有的排列的种数为 $n!$.

对于 n 个不同的元素，先规定各元素之间有个标准次序（常用的标准是从小到大），于是 n 个不同元素的任一排列中，某两个元素的先后次序与标准次序不同时，就称它们构成一个**逆序**，排列中逆序的总数称为这个排列的**逆序数**，逆序数为偶数的排列称为**偶排列**；逆序数为奇数的排列称为**奇排列**.

特别地，由 n 个自然数 $1,2,\cdots,n$ 组成的一个有序的数组称为一个 **n 级排列**．规定 n 级排列的标准次序为从小到大，也称为**自然序**，n 级排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 的逆序数记为 $N(i_1 i_2 \cdots i_n)$；n 级排列的种数共有 $n!$ 个，其中奇排列、偶排列各占一半.

1.1.2　对换

将一个排列中的两个数对调，其余的数不动，就会得到一个新排列，称这样的一个变动为**对换**.

对换的性质：

（1）排列经一次对换奇偶性发生改变；

（2）任意一个 n 级排列与排列 $1,2,\cdots,n$ 都可以经过有限次对换互变，并且所做对换的次数与这个排列有相同的奇偶性.

1.1.3　*n* 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{N(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n},$$

这里 $\sum\limits_{j_1 j_2 \cdots j_n}$ 表示对所有的 n 级排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 求和．n 阶行列式也可以简记为 $D = \left| a_{ij} \right|_n$ 或 $\det(a_{ij})$，其中 $a_{ij}\ (i = 1,2,\cdots,n; j = 1,2,\cdots,n)$ 称为行列式的**元素**．显然二阶、三阶行列式是 n 阶行列式的特例.

注　规定一阶行列式等于行列式中元素，即 $|a| = a$，注意不要与绝对值的记号混淆.

n 阶行列式的等价定义：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i_1 i_2 \cdots i_n} (-1)^{N(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n} .$$

1.1.4　行列式的性质

（1）**转置**　记

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad D^{\mathrm{T}} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

D^{T} 称为 D 的**转置行列式**，则行列式与其转置行列式相等，即有 $D = D^{\mathrm{T}}$.

（2）**换行（列）**　交换行列式的两行（列），行列式变号.

（3）**数乘**　用数 k 乘行列式等于将 k 乘到行列式的某一行（列）中所有元素，反过来一个行列式可以按行（列）提取公因式．特别的，若行列式中有一行元素为零，则行列式为零.

（4）**倍加**　将行列式某一行（列）的所有元素乘以一个数对应加到另一行（列）的元素上，行列式值不变.

（5）**分解**　行列式某一行（列）的元素均为两数之和，可按这一行（列）将其分解为两个行列式相加.

（6）**成比例**　一个行列式中若有两行（列）的元素对应成比例，则行列式的值为零．特别的，一个行列式中若有两行（列）元素相同，则行列式的值为零.

1.1.5　余子式、代数余子式

将行列式 $D = |a_{ij}|_n$ 的第 i 行、第 j 列元素去掉，剩余元素按原顺序构成的 $n-1$ 阶行列式，称为元素 a_{ij} 的**余子式**，记为 M_{ij} ；称 $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ 为元素 a_{ij} 的**代数余子式**.

在 n 阶行列式 D 中任选 k 行 k 列，交叉位置的元素按原顺序构成的 k 阶行列式 D_k 称为 D 的一个 k **阶子式**，去掉选定的 k 行 k 列元素后余下的元素按原顺序构成的 $n-k$ 阶行列式称为子式 D_k 的**余子式**，记为 M_k ．若选定的 k 行 k 列元素的行标为 $i_1, i_2, \cdots i_k$ ，列标为 $j_1, j_2, \cdots j_k$ ，则 $(-1)^{i_1+\cdots+i_k+j_1+\cdots+j_k} M_k$ 称为子式 D_k 的**代数余子式**.

1.1.6　行列式展开定理

（1）（**按行列展开定理**）　行列式等于它任意一行（列）的各元素与其对应的代数余子式乘积之和；行列式任意一行（列）的各元素与另一行（列）对应元素的代数余子式乘积之和为零．即若 $D = \left|a_{ij}\right|_n$ ，则

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = \begin{cases} D, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

*（2）（**拉普拉斯定理**）　行列式等于它任意选定 k 行（列）的全部 k 阶子式与其代数余子

式乘积之和．若在 n 阶行列式 D 中任意取定 k 行后得到的子式为 $M_1, M_2, \cdots, M_t$，它们的代数余子式分别为 $A_1, A_2, \cdots, A_t$，则

$$D = M_1 A_1 + M_2 A_2 + \cdots + M_t A_t \,.$$

1.1.7　特殊的行列式的计算

（1）上三角形行列式：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn} \,.$$

（2）下三角形行列式：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn} \,.$$

（3）对角形行列式：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn} \,.$$

（4）分块上三角形行列式：

$$\begin{vmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1k} & y_{11} & \cdots & y_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{k1} & \cdots & x_{kk} & y_{k1} & & y_{km} \\ 0 & \cdots & 0 & z_{11} & \cdots & z_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & z_{m1} & \cdots & z_{mm} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{k1} & \cdots & x_{kk} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} z_{11} & \cdots & z_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ z_{m1} & \cdots & z_{mm} \end{vmatrix} .$$

（5）分块下三角形行列式：

$$\begin{vmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1k} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{k1} & \cdots & x_{kk} & 0 & & 0 \\ y_{11} & \cdots & y_{1k} & z_{11} & \cdots & z_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_{m1} & \cdots & y_{mk} & z_{m1} & \cdots & z_{mm} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{k1} & \cdots & x_{kk} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} z_{11} & \cdots & z_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ z_{m1} & \cdots & z_{mm} \end{vmatrix} .$$

（6）分块对角形行列式：

$$\begin{vmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1k} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{k1} & \cdots & x_{kk} & 0 & & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & z_{11} & \cdots & z_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & z_{m1} & \cdots & z_{mm} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{k1} & \cdots & x_{kk} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} z_{11} & \cdots & z_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ z_{m1} & \cdots & z_{mm} \end{vmatrix}.$$

（7）范德蒙德行列式：

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{n\geqslant i>j\geqslant 1}(a_i - a_j).$$

1.2　典型例题分析

1.2.1　题型一、排列问题

例 1.2.1　若 7 级排列 $2\,1\,4\,i\,5\,k\,6$ 是偶排列，确定 i,k 的值.

解　由题意，当 $i=3,k=7$ 时，

$$N(2143576)=1+0+1+0+0+1+0=3,$$

排列为奇排列，由对换的性质必有排列 $2\,1\,4\,7\,5\,3\,6$ 为偶排列，故 $i=7,k=3$.

例 1.2.2　若规定排列 $a_1a_2\cdots a_n$ 的逆序数为 k，求排列 $a_na_{n-1}\cdots a_1$ 的逆序数.

解　若两个元素 a_i 和 a_j 在排列 $a_1a_2\cdots a_n$ 中产生逆序，则在排列 $a_na_{n-1}\cdots a_1$ 中就不产生逆序，反之亦然．因此排列 $a_1a_2\cdots a_n$ 的逆序数与排列 $a_na_{n-1}\cdots a_1$ 的逆序数之和等于 n 个元素中取 2 个元素的组合数 C_n^2，从而排列 $a_na_{n-1}\cdots a_1$ 的逆序数为 C_n^2-k.

1.2.2　题型二、利用定义计算行列式

例 1.2.3　用行列式的定义计算 $D_4=\begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 & x-1 \\ 1 & 0 & x-2 & -1 \\ 2 & x-3 & -2 & 1 \\ x-4 & 4 & 1 & 3 \end{vmatrix}$ 中 x^4 与 x^3 的系数.

解　x^4 与 x^3 来自行列式 D_4 展开中的 $(-1)^{N(4321)}(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ 项，故 x^4 前的系数为 $(-1)^{N(4321)}=1$，x^3 前的系数为 $(-1)^{N(4321)}(-1-2-3-4)=-10$.

例 1.2.4　【1991（4）】n 阶行列式 $\begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b \\ b & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix} =$ ________.

解　由行列式定义有

$$\begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b \\ b & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix} = (-1)^{N(1\,2\cdots n)}a^n + (-1)^{N(2\,3\cdots n\,1)}b^n = a^n + (-1)^{n-1}b^n.$$

例 1.2.5　【1990（4）】设 $\boldsymbol{A}$ 为 10×10 矩阵，

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 10^{10} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

计算行列式 $|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|$，其中 $\boldsymbol{E}$ 为 10 阶单位矩阵，λ 为常数.

解　由题意，由行列式定义有

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}| &= \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda & 1 \\ 10^{10} & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\lambda \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{N(1\,2\cdots10)}\times(-\lambda)^{10} + (-1)^{N(2\,3\cdots10\,1)}\times1^9\times10^{10} \\ &= \lambda^{10}-10^{10}. \end{aligned}$$

例 1.2.6　若行列式 $D_n(n\geqslant 2)$ 中每个元素只取 1 或 -1，证明：行列式的值为偶数.

证　由行列式的定义，D_n 表示 $n!$ 个一般项的和，当 $n\geqslant 2$ 时，$n!$ 为偶数．再由 D_n 中每个元素只取 1 或 -1，从而其一般项的值也只为 1 或 -1．进而，若一般项中 1 的个数为奇数，则 -1 也为奇数，此时和为偶数；若 1 的个数为偶数，则 -1 也为偶数，此时和也为偶数，故命题成立.

1.2.3　题型三、利用性质计算行列式

例 1.2.7　已知 $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 2$，求行列式 $D = \begin{vmatrix} x_1+y_1 & y_1+z_1 & z_1+x_1 \\ x_2+y_2 & y_2+z_2 & z_2+x_2 \\ x_3+y_3 & y_3+z_3 & z_3+x_3 \end{vmatrix}$ 的值.

解法 1

$$D = \begin{vmatrix} x_1+y_1 & y_1+z_1 & z_1+x_1 \\ x_2+y_2 & y_2+z_2 & z_2+x_2 \\ x_3+y_3 & y_3+z_3 & z_3+x_3 \end{vmatrix} \xlongequal{c_1+c_2+c_3} \begin{vmatrix} 2(x_1+y_1+z_1) & y_1+z_1 & z_1+x_1 \\ 2(x_2+y_2+z_2) & y_2+z_2 & z_2+x_2 \\ 2(x_3+y_3+z_3) & y_3+z_3 & z_3+x_3 \end{vmatrix}$$

$$=2\begin{vmatrix} x_1+y_1+z_1 & y_1+z_1 & z_1+x_1 \\ x_2+y_2+z_2 & y_2+z_2 & z_2+x_2 \\ x_3+y_3+z_3 & y_3+z_3 & z_3+x_3 \end{vmatrix} \xlongequal[c_3-c_1]{c_2-c_1} 2\begin{vmatrix} x_1+y_1+z_1 & -x_1 & -y_1 \\ x_2+y_2+z_2 & -x_2 & -y_2 \\ x_3+y_3+z_3 & -x_3 & -y_3 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_1+c_2+c_3} 2\begin{vmatrix} z_1 & -x_1 & -y_1 \\ z_2 & -x_2 & -y_2 \\ z_3 & -x_3 & -y_3 \end{vmatrix} \xlongequal{c_1\leftrightarrow c_2} -2\begin{vmatrix} -x_1 & z_1 & -y_1 \\ -x_2 & z_2 & -y_2 \\ -x_3 & z_3 & -y_3 \end{vmatrix} \xlongequal{c_2\leftrightarrow c_3} 2\begin{vmatrix} -x_1 & -y_1 & z_1 \\ -x_2 & -y_2 & z_2 \\ -x_3 & -y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

$$=2\times 2=4.$$

解法 2　用行列式按列分解的性质，可将行列式 D 分解为 $C_2^1\times C_2^1\times C_2^1=8$ 个行列式相加，但其中只有 $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$ 及 $\begin{vmatrix} y_1 & z_1 & x_1 \\ y_2 & z_2 & x_2 \\ y_3 & z_3 & x_3 \end{vmatrix}$ 的值不为零，其余的行列式都有两列元素相同，值为零．故

$$D=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} y_1 & z_1 & x_1 \\ y_2 & z_2 & x_2 \\ y_3 & z_3 & x_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}=2+2=4.$$

例 1.2.8　计算行列式 $D_4=\begin{vmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{vmatrix}$.

解　根据行列式的性质，有

$$D_4\xlongequal{r_1+r_2+r_3+r_4}\begin{vmatrix} a+3b & a+3b & a+3b & a+3b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{vmatrix}=(a+3b)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_4-br_1]{\substack{r_2-br_1\\ r_3-br_1}}(a+3b)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-b \end{vmatrix}=(a+3b)(a-b)^3.$$

注　在行列式的计算中，一个常用的技巧是“扫”的方法，即首先构造出一个基本行（或基本列），然后利用基本行（或基本列）将其余行（或列）中相同元素化为 0，其核心思想是构造出尽量多的 0 元素．本题的另一种解法见例 1.2.14．

例 1.2.9　【1989（4）】计算行列式 $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ x+1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=$________.

解　由题意，由行列式的性质，有

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ x+1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \xlongequal{c_1+c_2+c_3+c_4} \begin{vmatrix} x & -1 & 1 & x-1 \\ x & -1 & x+1 & -1 \\ x & x-1 & 1 & -1 \\ x & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= x\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \xlongequal[c_4+c_1]{\substack{c_2+c_1 \\ c_3-c_1}} x\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 1 & 0 & x & 0 \\ 1 & x & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = x(-1)^{N(4\,3\,2\,1)}x^3 = x^4 .$$

例 1.2.10 【2014（1,3）】行列式 $\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix} =$（ ）.

（A）$(ad-bc)^2$； （B）$-(ad-bc)^2$；

（C）$a^2d^2-b^2c^2$； （D）$b^2c^2-a^2d^2$.

解 根据行列式的性质，有

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} c & 0 & 0 & d \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & a & b & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c & d & 0 & 0 \\ a & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & c \\ 0 & 0 & b & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix}\begin{vmatrix} d & c \\ b & a \end{vmatrix}$$

$$= (cb-ad)(da-cb) = -(ad-cb)^2 ,$$

故答案选（B）.

例 1.2.11 （爪形行列式）计算行列式 $D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$.

解 根据行列式的性质，有

$$D_4 \xlongequal[r_1-\frac{1}{4}r_1]{\substack{r_1-\frac{1}{2}r_2 \\ r_1-\frac{1}{3}r_3}} \begin{vmatrix} 1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)\times 2\times 3\times 4 = -2 .$$

例 1.2.12 计算行列式 $D_4 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ -b & b & 0 & 0 \\ 0 & -b & b & 0 \\ 0 & 0 & -b & b \end{vmatrix}$.

解
$$D_4 \xlongequal{c_4+c_3} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3+a_4 & a_4 \\ -b & b & 0 & 0 \\ 0 & -b & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{vmatrix} \xlongequal{c_2+c_3} \begin{vmatrix} a_1 & a_2+a_3+a_4 & a_3+a_4 & a_4 \\ -b & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{vmatrix}$$
$$\xlongequal{c_1+c_2} \begin{vmatrix} a_1+a_2+a_3+a_4 & a_2+a_3+a_4 & a_3+a_4 & a_4 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{vmatrix}$$
$$=(a_1+a_2+a_3+a_4)b^3.$$

注　在行列式的计算中，一个常用的技巧是“**滚动**”的方法，即按照一定的顺序用前一行（或前一列）的结果处理后一行（或后一列），如本题中首先利用第 4 列处理第 3 列，然后再利用第 3 列处理第 2 列，最后再利用第 2 列处理第 1 列.

1.2.4　题型四、行列式按行或列展开

行列式按行（列）展开的性质建立了一个行列式与较之低一阶行列式之间的关系，使用公式对行列式进行升、降阶再进行计算．利用该方法计算行列式时，需要记清按行（列）展开的性质及推论中的元素乘**代数余子式**的形式.

例 1.2.13　计算行列式 $D_4=\begin{vmatrix} 1 & 3 & -5 & 1 \\ 5 & -2 & 7 & -2 \\ 2 & 1 & -4 & -1 \\ -3 & -5 & -24 & 3 \end{vmatrix}$.

解　根据行列式的性质，有
$$D_4 \xlongequal[r_4-3r_1]{\substack{r_2+2r_1 \\ r_3+r_1}} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -5 & 1 \\ 7 & 4 & -3 & 0 \\ 3 & 4 & -9 & 0 \\ -6 & -4 & -9 & 0 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{按第4列展开}} -\begin{vmatrix} 7 & 4 & -3 \\ 3 & 4 & -9 \\ -6 & -4 & -9 \end{vmatrix}$$
$$\xlongequal[r_3+r_2]{r_1-r_2} -\begin{vmatrix} 4 & 0 & 6 \\ 3 & 4 & -9 \\ -3 & 0 & -18 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{按第2列展开}} (-4)\times\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ -3 & -18 \end{vmatrix}$$
$$=(-4)\times(-72+18)=216\,.$$

例 1.2.14　计算行列式 $D_4=\begin{vmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{vmatrix}$（其中 $a\neq b$）.

解　首先将行列式升阶，然后利用行列式的性质进行求解：

$$D_4=\begin{vmatrix} a & b & b & b\\ b & a & b & b\\ b & b & a & b\\ b & b & b & a\end{vmatrix}\xlongequal{\text{升阶}}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & a & b & b & b\\ 0 & b & a & b & b\\ 0 & b & b & a & b\\ 0 & b & b & b & a\end{vmatrix}\xlongequal[\substack{r_4-br_1\\ r_5-br_1}]{\substack{r_2-br_1\\ r_3-br_1}}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ -b & a-b & 0 & 0 & 0\\ -b & 0 & a-b & 0 & 0\\ -b & 0 & 0 & a-b & 0\\ -b & 0 & 0 & 0 & a-b\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_1+\frac{b}{a-b}r_5]{\substack{r_1+\frac{b}{a-b}r_2\\ \cdots}}\begin{vmatrix} 1+\dfrac{4b}{a-b} & 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & a-b & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & a-b & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & a-b & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & a-b\end{vmatrix}=\left(1+\frac{4b}{a-b}\right)(a-b)^4$$

$$=(a+3b)(a-b)^3 .$$

注　本题的另一种解法见例 1.2.8.

例 1.2.15　计算 $n\ (n\geqslant 3)$ 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & 3 & \cdots & 3\\ 3 & 2 & 3 & 3 & \cdots & 3\\ 3 & 3 & 3 & 3 & \cdots & 3\\ 3 & 3 & 3 & 4 & \cdots & 3\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 3 & 3 & 3 & 3 & \cdots & n\end{vmatrix}$.

解　结合行列式的性质，利用“扫”的技巧，有

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & 3 & \cdots & 3\\ 3 & 2 & 3 & 3 & \cdots & 3\\ 3 & 3 & 3 & 3 & \cdots & 3\\ 3 & 3 & 3 & 4 & \cdots & 3\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 3 & 3 & 3 & 3 & \cdots & n\end{vmatrix}\xlongequal[\substack{i=1\cdots n\\ i\neq 3}]{r_i-r_3}\begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 3 & 3 & 3 & 3 & \cdots & 3\\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & n-3\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{按第3列展开}}3\begin{vmatrix} -2 & & & & 0\\ & -1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & n-3\end{vmatrix}=6(n-3)!.$$

例 1.2.16　（带状行列式）计算行列式 $D_n=\begin{vmatrix} a+b & b & 0 & \cdots & 0\\ a & a+b & b & \cdots & 0\\ 0 & a & a+b & \ddots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & b\\ 0 & 0 & \cdots & a & a+b\end{vmatrix}$（其中 $a\neq b$）.

解　$$D_n \xlongequal{\text{将第1列分解}} \begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 \\ a & a+b & b & \cdots & 0 \\ 0 & a & a+b & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & b \\ 0 & 0 & \cdots & a & a+b \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a+b & b & \cdots & 0 \\ 0 & a & a+b & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & b \\ 0 & 0 & \cdots & a & a+b \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{后行列式按第1列展开}]{\substack{\text{前行列式} \\ r_i - r_{i-1} \\ i=2\cdots n}} \begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & b \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix} + b\begin{vmatrix} a+b & b & 0 & \cdots & 0 \\ a & a+b & b & \cdots & 0 \\ 0 & a & a+b & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & b \\ 0 & 0 & \cdots & a & a+b \end{vmatrix}_{n-1}$$

$$= a^n + bD_{n-1},$$

类似地，

$$D_n \xlongequal{\text{将第1行分解}} \begin{vmatrix} b & b & 0 & \cdots & 0 \\ a & a+b & b & \cdots & 0 \\ 0 & a & a+b & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & b \\ 0 & 0 & \cdots & a & a+b \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a+b & b & \cdots & 0 \\ 0 & a & a+b & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & b \\ 0 & 0 & \cdots & a & a+b \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{后行列式按第1列展开}]{\substack{\text{前行列式} \\ c_i - c_{i-1} \\ i=2\cdots n}} \begin{vmatrix} b & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a & b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & b & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & a & b \end{vmatrix} + a\begin{vmatrix} a+b & b & 0 & \cdots & 0 \\ a & a+b & b & \cdots & 0 \\ 0 & a & a+b & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & b \\ 0 & 0 & \cdots & a & a+b \end{vmatrix}_{n-1}$$

$$= b^n + aD_{n-1},$$

从而有

$$\begin{cases} D_n = a^n + bD_{n-1} \\ D_n = b^n + aD_{n-1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} aD_n = a^{n+1} + abD_{n-1} \\ bD_n = b^{n+1} + abD_{n-1} \end{cases} \Rightarrow (a-b)D_n = a^{n+1} - b^{n+1},$$

再由 $a \neq b$，解得

$$D_n = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b} = a^n + a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + \cdots + b^n .$$

例 1.2.17　【1996（4）】计算行列式 $D_5 = \begin{vmatrix} 1-a & a & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1-a & a & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & a & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1-a & a \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1-a \end{vmatrix} =$ ________.

解　$\begin{vmatrix} 1-a & a & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1-a & a & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & a & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1-a & a \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1-a \end{vmatrix} \xlongequal[i=2,3,4,5]{c_1+c_i} \begin{vmatrix} 1 & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-a & a & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & a & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1-a & a \\ -a & 0 & 0 & -1 & 1-a \end{vmatrix}$

$$= D_4 - (-1)^{5+1} a \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 1-a & a & 0 & 0 \\ -1 & 1-a & a & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & a \end{vmatrix} = D_4 - (-1)^{5+1} a^5 = \cdots$$

$$= D_1 - (-1)^{1+1} a^1 - (-1)^{2+1} a^2 - (-1)^{3+1} a^3 - (-1)^{4+1} a^4 - (-1)^{5+1} a^5$$

$$= 1 - a + a^2 - a^3 + a^4 - a^5 .$$

例 1.2.18　设 $A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$，试求：

（1）$A_{14} + A_{24} + A_{34} + A_{44}$；　　　　（2）$M_{41} + M_{42} + M_{43} + 2M_{44}$.

解　（1）由于 $A_{14} + A_{24} + A_{34} + A_{44} = 1\times A_{14} + 1\times A_{24} + 1\times A_{34} + 1\times A_{44}$，因此用 $1,1,1,1$ 替代行列式 A 中的第四列构造一个新的行列式，即

$$B_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix},$$

可见 B_1 与 A 的第四列元素的代数余子式分别相同，因此将 B_1 按第四列元素展开恰好等于 $A_{14} + A_{24} + A_{34} + A_{44}$，故

$$A_{14} + A_{24} + A_{34} + A_{44} = B_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal{r_3 - r_2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2\times(-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal{c_3 - c_2} 2 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 2\times 2\times(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 8 .$$

（2）由于 $M_{41} + M_{42} + M_{43} + 2M_{44} = -A_{41} + A_{42} - A_{43} + 2A_{44}$，因此用 $-1, 1, -1, 2$ 替代行列式 A 中的第四行构造一个新的行列式，即

$$B_2=\begin{vmatrix}1&0&1&3\\-1&1&-1&2\\1&1&-1&0\\-1&1&-1&2\end{vmatrix},$$

而 B_2 由于 2，3 行相同，其值为 0．故 $M_{41}+M_{42}+M_{43}+2M_{44}=0$.

例 1.2.19　证明：$\begin{vmatrix}1&1&1\\a&b&c\\a^3&b^3&c^3\end{vmatrix}=(a+b+c)(c-b)(c-a)(b-a)$.

证　将行列式$\begin{vmatrix}1&1&1\\a&b&c\\a^3&b^3&c^3\end{vmatrix}$升阶，构造新的行列式

$$D_4=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\a&b&c&x\\a^2&b^2&c^2&x^2\\a^3&b^3&c^3&x^3\end{vmatrix},$$

其为范德蒙德行列式，两个行列式之间的关联是前者为后者中元素 x^2 的余子式（用 M_{34} 表示），即$\begin{vmatrix}1&1&1\\a&b&c\\a^3&b^3&c^3\end{vmatrix}=M_{34}$. 对行列式 D_4 我们有两种计算方式，一是按范德蒙德行列式的公式，有

$$\begin{vmatrix}1&1&1&1\\a&b&c&x\\a^2&b^2&c^2&x^2\\a^3&b^3&c^3&x^3\end{vmatrix}=(x-c)(x-b)(x-a)(c-b)(c-a)(b-a).$$

另一种计算方式是将行列式 D_4 按第四列展开，并由 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ 有

$$\begin{vmatrix}1&1&1&1\\a&b&c&x\\a^2&b^2&c^2&x^2\\a^3&b^3&c^3&x^3\end{vmatrix}=A_{14}+xA_{24}+x^2A_{34}+x^3A_{44}=-M_{14}+xM_{24}-x^2M_{34}+x^3M_{44},$$

从而有

$$-M_{14}+xM_{24}-x^2M_{34}+x^3M_{44}=(x-c)(x-b)(x-a)(c-b)(c-a)(b-a),$$

两侧同为关于 x 的多项式，由待定系数法并结合所要证明问题，等式左右两侧 x^2 前系数相等，其中，等式左侧 x^2 前系数为 $-M_{34}$，而等式左侧 x^2 前系数为

$$\begin{aligned}&-a(c-b)(c-a)(b-a)-b(c-b)(c-a)(b-a)-c(c-b)(c-a)(b-a)\\&=-(a+b+c)(c-b)(c-a)(b-a),\end{aligned}$$

所以 $M_{34}=(a+b+c)(c-b)(c-a)(b-a)$，命题得证.

*1.2.5　题型五、行列式按拉普拉斯方法展开

例 1.2.20　计算行列式 $D_{2n}=\begin{vmatrix} a_1 & & & & & b_1 \\ & \ddots & & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ & & a_n & b_n & & \\ & & c_n & d_n & & \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & & \ddots & \\ c_1 & & & & & d_1 \end{vmatrix}$.

解　由拉普拉斯定理可知

$$D_{2n}=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_2 & & & & & b_2 \\ & \ddots & & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ & & a_n & b_n & & \\ & & c_n & d_n & & \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & & \ddots & \\ c_2 & & & & & d_2 \end{vmatrix}_{2n-2}$$

$$=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_3 & & & & & b_3 \\ & \ddots & & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ & & a_n & b_n & & \\ & & c_n & d_n & & \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & & \ddots & \\ c_3 & & & & & d_3 \end{vmatrix}_{2n-4}=\cdots$$

$$=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{vmatrix}\cdots\begin{vmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{vmatrix}=\prod_{i=1}^{n}(a_id_i-b_ic_i).$$

1.3　深 化 训 练

1.3.1　填空题

（1）排列 $(n-1)(n-2)\cdots 21n$ 的逆序数为________.

（2）排列 $2n\,(2n-2)\cdots 4\,2\,(2n-1)\,(2n-3)\,3\,1$ 的逆序数________.

（3）6 级排列 $j_1j_2j_3j_4j_5j_6$ 与 $j_6j_5j_4j_3j_2j_1$ 的逆序数之和________.

（4）若 9 级排列 $1274i56k9$ 是奇排列，则 $i=$________，$k=$________.

（5）行列式 $D_4=\begin{vmatrix} 0 & y & 0 & x \\ x & 0 & y & 0 \\ 0 & x & 0 & y \\ y & 0 & x & 0 \end{vmatrix}$ 的值为________.

（6）多项式 $f(x)=\begin{vmatrix} x-1 & 0 & 5 & 3 \\ 1 & x-2 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & x+3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & x+4 \end{vmatrix}$ 中 x^3 的系数为________，常数项为________.

（7）设行列式 $D=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=1$，则 $D_1=\begin{vmatrix} 4a_1 & 2a_1-3a_2 & a_3 \\ 4b_1 & 2b_1-3b_2 & b_3 \\ 4c_1 & 2c_1-3c_2 & c_3 \end{vmatrix}$ 的值为________.

（8）若行列式 $D=\begin{vmatrix} 2 & 1 & x \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$ 的余子式 $M_{22}=3$，则 $x=$________.

（9）【2001（4）】设 $D=\begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & -2 & 2 \end{vmatrix}$，则第 4 行各元素余子式之和的值为________.

（10）三阶行列式 D 中，第 1 列元素分别为 $1,-3,2$，第 3 列元素的余子式依次是 $2,a,-2$，则 a 的值为________.

（11）若行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix}$，则 $M_{21}+M_{22}+M_{23}=$________.

1.3.2　单项选择题

（1）行列式 $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 4 \\ x & -2 & 2 \\ -5 & 5 & 1 \end{vmatrix}$ 中，元素 x 的代数余子式是（　　）.

（A）$\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$；　　（B）$-\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}$；

（C）$-\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$；　　（D）$\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}$.

（2）若 3 阶行列式 $D=0$，则下列结论正确的是（　　）.

（A）行列式 D 中有一行或列的元素全为零；

（B）行列式 D 中的元素全为零；

（C）行列式 D 中有两行或列的元素对应成比例；

（D）前三个选项不一定成立.

（3）【1999（2）】方程 $f(x)=\begin{vmatrix} x-2 & x-1 & x-2 & x-3 \\ 2x-2 & 2x-1 & 2x-2 & 2x-3 \\ 3x-3 & 3x-2 & 4x-5 & 3x-5 \\ 4x & 4x-3 & 5x-7 & 4x-3 \end{vmatrix}=0$ 的根的个数为（　　）.

（A）1 个；　（B）2 个；　（C）3 个；　（D）4 个.

（4）下列关于行列式表述不正确的是（　　）.

（A）行列式转置值不变；

（B）某一行元素乘以一个数对应加到另外一行，行列式值不变；

（C）数乘行列式等于将数乘到行列式的每一个元素上；

（D）行列式中两行元素互换，行列式变号.

（5）【1996（1）】四阶行列式$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix}$的值等于（　　）.

（A）$a_1a_2a_3a_4 - b_1b_2b_3b_4$；　　（B）$a_1a_2a_3a_4 + b_1b_2b_3b_4$；

（C）$(a_1a_2 - b_1b_2)(a_3a_4 - b_3b_4)$；　　（D）$(a_2a_3 - b_2b_3)(a_1a_4 - b_1b_4)$.

1.3.3　计算下列行列式：

（1）$D_3 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 301 \\ 1 & 2 & 102 \\ 2 & 4 & 199 \end{vmatrix}$；　（2）$D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$；　（3）$D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}$.

1.3.4　计算行列式$D_n = \begin{vmatrix} x & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & y \\ y & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}$.

1.3.5　计算行列式$D_{n+1} = \begin{vmatrix} a_0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{vmatrix}$，（$a_1a_2\cdots a_n \neq 0$）.

1.3.6　计算行列式$D_{n+1} = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1-a_1 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a_2 & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-a_{n-1} & a_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1-a_n \end{vmatrix}$.

1.3.7　计算 n 阶行列式$D_n = \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}$，（$a_1a_2\cdots a_n \neq 0$）.

1.3.8　计算行列式$D_n = \begin{vmatrix} a_1+1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2+1 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n+1 \end{vmatrix}$.

1.3.9　计算行列式 $D_n=\begin{vmatrix} a_1^2+1 & a_1a_2 & \cdots & a_1a_n \\ a_2a_1 & a_2^2+1 & \cdots & a_2a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_na_1 & a_na_2 & \cdots & a_n^2+1 \end{vmatrix}$.

1.3.10　计算行列式 $D_n=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n \\ 1 & 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 \\ 1 & a & 1 & 2 & \cdots & n-2 \\ 1 & a & a & 1 & \cdots & n-3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a & a & a & \cdots & 1 \end{vmatrix}$.

1.3.11　设 n 阶行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$，求 D 展开式的正项总数.

1.3.12　已知行列式 $D_4=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}=-6$，求 $A_{41}+A_{43}$ 和 $A_{42}+A_{44}$.

1.3.13　计算行列式 $D_4=\begin{vmatrix} a_1^3 & a_1^2b_1 & a_1b_1^2 & b_1^3 \\ a_2^3 & a_2^2b_2 & a_2b_2^2 & b_2^3 \\ a_3^3 & a_3^2b_3 & a_3b_3^2 & b_3^3 \\ a_4^3 & a_4^2b_4 & a_4b_4^2 & b_4^3 \end{vmatrix}$，其中 $a_1a_2a_3a_4\neq 0$.

1.3.14　计算行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1+\cos\phi_1 & 1+\cos\phi_2 & 1+\cos\phi_3 & 1+\cos\phi_4 \\ \cos\phi_1+\cos^2\phi_1 & \cos\phi_2+\cos^2\phi_2 & \cos\phi_3+\cos^2\phi_3 & \cos\phi_4+\cos^2\phi_4 \\ \cos^2\phi_1+\cos^3\phi_1 & \cos^2\phi_2+\cos^3\phi_2 & \cos^2\phi_3+\cos^3\phi_3 & \cos^2\phi_4+\cos^3\phi_4 \end{vmatrix}.$$

1.3.15　证明 $\begin{vmatrix} 1+x_1 & 1+x_1^2 & \cdots & 1+x_1^n \\ 1+x_2 & 1+x_2^2 & \cdots & 1+x_2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1+x_n & 1+x_n^2 & \cdots & 1+x_n^n \end{vmatrix}=\prod\limits_{1\leqslant j<k\leqslant n}(x_k-x_j)\left[2\prod\limits_{i=1}^{n}x_i-\prod\limits_{i=1}^{n}(x_i-1)\right]$.

1.3.16　若 $i_1i_2\cdots i_n$ 为一个 n 级排列, 证明：排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 与排列 $i_ni_{n-1}\cdots i_1$ 的逆序数之和为 $\dfrac{n(n-1)}{2}$.

1.3.17　证明奇数阶反对称行列式的值为零.

1.3.18　设 $D=\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$，证明：

$$\begin{vmatrix} a+x & b+y & c+z \\ a_1+x & b_1+y & c_1+z \\ a_2+x & b_2+y & c_2+z \end{vmatrix} = D + x\sum_{i=1}^{3} A_{i1} + y\sum_{i=1}^{3} A_{i2} + z\sum_{i=1}^{3} A_{i3},$$

其中，$A_{ij}, i, j=1,2,3$ 为 D 的代数余子式.

1.4　深化训练详解

1.3.1　填空题

（1）$\dfrac{(n-2)(n-1)}{2}$.

提示　$N((n-1)(n-2)\cdots 321n)=0+1+\cdots+(n-2)+0=\dfrac{(n-2)(n-1)}{2}$.

（2）$\dfrac{n(3n+1)}{2}$. **提示**　由于

$$\begin{array}{cccccccc} 2n & 2n-2 & \cdots & 2 & 2n-1 & 2n-3 & \cdots & 1 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 0 & 1 & \cdots & n & 1 & 3 & \cdots & 2n-1 \end{array}$$

从而

$$N\big(2n\,(2n-2)\cdots 4\,2\,(2n-1)\,(2n-3)\,3\,1\big)$$

$$=0+1+2+\cdots+n+1+3+\cdots+2n-1=\frac{n(n+1)}{2}+\frac{2n^2}{2}=\frac{n(3n+1)}{2}.$$

（3）15. **提示**　由于本题为填空题，可以使用特例进行求解，如取 $j_1j_2j_3j_4j_5j_6$ 与 $j_6j_5j_4j_3j_2j_1$ 分别为123456和654321，计算逆序数之和为15，其一般方法见证明题 1.3.16.

（4）$i=3, k=8$. **提示**　$N(127435689)=5$ 为奇排列.

（5）$2x^2y^2-y^4-x^4$. **提示**　根据行列式的定义，有

$$D_4=(-1)^{N(2143)}yxyx+(-1)^{N(2341)}yyyy+(-1)^{N(4123)}xxxx+(-1)^{N(4321)}xyxy$$

$$=yxyx-yyyy-xxxx+xyxy=2x^2y^2-y^4-x^4.$$

（6）4，300. **提示**　x^3 的系数来自于主对角线上元素 $x-1, x-2, x+3, x+4$ 的乘积项，从而 $-1-2+3+4=4$，而常数项为

$$f(0)=\begin{vmatrix} -1 & 0 & 5 & 3 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 4 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -1 & 0 & 5 & 3 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ 5 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}=(-2)\times\begin{vmatrix} -1 & 5 & 3 \\ 5 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix},$$

$$=(-2)\times 5\times\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 5 & 5 \end{vmatrix}=300.$$

（7）-12．**提示**

$$D_1=\begin{vmatrix}4a_1 & 2a_1-3a_2 & a_3\\ 4b_1 & 2b_1-3b_2 & b_3\\ 4c_1 & 2c_1-3c_2 & c_3\end{vmatrix}=4\begin{vmatrix}a_1 & 2a_1-3a_2 & a_3\\ b_1 & 2b_1-3b_2 & b_3\\ c_1 & 2c_1-3c_2 & c_3\end{vmatrix}\overset{c_2-2c_1}{=\!=\!=}4\begin{vmatrix}a_1 & -3a_2 & a_3\\ b_1 & -3b_2 & b_3\\ c_1 & -3c_2 & c_3\end{vmatrix}$$

$$=(-3)\times 4\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}=-12\,.$$

（8）5．**提示** 由已知 $M_{22}=\begin{vmatrix}2 & x\\ 1 & 4\end{vmatrix}=8-x=3$，有 $x=5$．

（9）-28．**提示** 由题意，第 4 行各元素余子式之和

$$M_{41}+M_{42}+M_{43}+M_{44}=-A_{41}+A_{42}-A_{43}+A_{44}$$

$$=\begin{vmatrix}3 & 0 & 4 & 0\\ 2 & 2 & 2 & 2\\ 0 & -7 & 0 & 0\\ -1 & 1 & -1 & 1\end{vmatrix}=(-7)\times(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}3 & 4 & 0\\ 2 & 2 & 2\\ -1 & -1 & 1\end{vmatrix}$$

$$=7\times\begin{vmatrix}3 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 4\\ -1 & -1 & 1\end{vmatrix}=7\times 4\times(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}3 & 4\\ -1 & -1\end{vmatrix}=-28\,.$$

（10）$\dfrac{2}{3}$．**提示** 行列式第三列元素的余子式依次是 $2,a,-2$，则第三列元素的代数余子式依次是 $2,-a,-2$，由行列式按行列展开的推论，有 $1\times 2+(-3)\times(-a)+2\times(-2)=0$，解得 $a=\dfrac{2}{3}$．

（11）16．**提示** $M_{21}+M_{22}+M_{23}=-A_{21}+A_{22}-A_{23}=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ -1 & 1 & -1\\ 1 & 4 & 9\end{vmatrix}=16$．

1.3.2　单项选择题

（1）（B）.（2）（D）.

（3）（B）.**提示** 由题意，由于

$$f(x)=\begin{vmatrix}x-2 & x-1 & x-2 & x-3\\ 2x-2 & 2x-1 & 2x-2 & 2x-3\\ 3x-3 & 3x-2 & 4x-5 & 3x-5\\ 4x & 4x-3 & 5x-7 & 4x-3\end{vmatrix}\underset{i=2,3,4}{\overset{c_i-c_1}{=\!=\!=}}\begin{vmatrix}x-2 & 1 & 0 & -1\\ 2x-2 & 1 & 0 & -1\\ 3x-3 & 1 & x-2 & -2\\ 4x & -3 & x-7 & -3\end{vmatrix}$$

$$\overset{c_4+c_2}{=\!=\!=}\begin{vmatrix}x-2 & 1 & 0 & 0\\ 2x-2 & 1 & 0 & 0\\ 3x-3 & 1 & x-2 & -1\\ 4x & -3 & x-7 & -6\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x-2 & 1\\ 2x-2 & 1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}x-2 & -1\\ x-7 & -6\end{vmatrix}=5x(x-1)\,,$$

从而方程有两个解，因此选择（B）.

（4）（C）.

（5）（D）. **提示** 由题意，由拉普拉斯定理有

$$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ b_3 & a_3 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ b_4 & a_4 \end{vmatrix} = (a_2a_3 - b_2b_3)(a_1a_4 - b_1b_4) .$$

1.3.3

（1）$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 301 \\ 1 & 2 & 102 \\ 2 & 4 & 199 \end{vmatrix} \xlongequal{c_3 - 100c_1} \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & -1 \end{vmatrix} \xlongequal{c_3 - c_2} \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -5 \end{vmatrix} = (-5)(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -25 .$$

（2）$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \xlongequal{r_1 + r_2 + r_3 + r_4} 10\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4 - 4r_1]{\substack{r_2 - 2r_1 \\ r_3 - 3r_1}} 10\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & -3 & -2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 10\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -3 & -2 & -1 \end{vmatrix} \xlongequal{c_2 - 2c_3} 10\begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 10 \times (-4) \times \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -3 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 10 \times (-4) \times (-4) = 160 .$$

（3）$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix} \xlongequal[r_2 - r_1]{\substack{r_4 - r_3 \\ r_3 - r_2}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 10 \end{vmatrix} \xlongequal[r_2 - r_1]{r_3 - r_2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 3 = 1 .$$

1.3.4 $$D_n \xlongequal{\text{按第1列展开}} x\begin{vmatrix} x & y & & & \\ & x & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & x & y \\ & & & & x \end{vmatrix} + (-1)^{n+1} y \begin{vmatrix} y & & & & \\ x & y & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & y & \\ & & & x & y \end{vmatrix}$$

$$= xx^{n-1} + (-1)^{n+1} yy^{n-1} = x^n + (-1)^{n+1} y^n .$$

1.3.5 $$\begin{vmatrix} a_0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{vmatrix} \xlongequal[c_1 - \frac{1}{a_n}c_{n+1}]{\substack{c_1 - \frac{1}{a_1}c_2 \\ c_1 - \frac{1}{a_2}c_3 \\ \cdots}} \begin{vmatrix} a_0 - \sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i} & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{vmatrix}$$

$$= \left(a_0 - \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)\prod_{i=1}^{n} a_i .$$

1.3.6 $$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1-a_1 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a_2 & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-a_{n-1} & a_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1-a_n \end{vmatrix} \xlongequal[\substack{\cdots \\ r_{n+1}+r_n}]{\substack{r_2+r_1 \\ r_3+r_2}} \begin{vmatrix} 1 & a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 .$$

1.3.7 $$\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix} \xlongequal{\text{升阶}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1+a_2 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}_{n+1}$$

$$\xlongequal[\substack{\cdots \\ r_{n+1}-r_1}]{\substack{r_2-r_1 \\ r_3-r_1}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}_{n+1} \xlongequal[\substack{\cdots \\ c_1+\frac{1}{a_n}c_{n+1}}]{\substack{c_1+\frac{1}{a_1}c_2 \\ c_1+\frac{1}{a_2}c_3}} \begin{vmatrix} 1+\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i} & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{vmatrix}_{n+1}$$

$$= \left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)\prod_{i=1}^{n}a_i .$$

1.3.8 $$\begin{vmatrix} a_1+1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2+1 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n+1 \end{vmatrix} \xlongequal{c_1+c_2+\cdots+c_n} \begin{vmatrix} 1+\sum\limits_{i=1}^{n}a_i & a_2 & \cdots & a_n \\ 1+\sum\limits_{i=1}^{n}a_i & a_2+1 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1+\sum\limits_{i=1}^{n}a_i & a_2 & \cdots & a_n+1 \end{vmatrix}$$

$$= (1+\sum_{i=1}^{n}a_i)\begin{vmatrix} 1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & a_2+1 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_2 & \cdots & a_n+1 \end{vmatrix} \xlongequal[\substack{\cdots \\ c_n-a_nc_1}]{\substack{c_2-a_2c_1 \\ c_3-a_3c_1}} (1+\sum_{i=1}^{n}a_i)\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = (1+\sum_{i=1}^{n}a_i) .$$

1.3.9 $$\begin{vmatrix} a_1^2+1 & a_1a_2 & \cdots & a_1a_n \\ a_2a_1 & a_2^2+1 & \cdots & a_2a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_na_1 & a_na_2 & \cdots & a_n^2+1 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{升阶}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & a_1^2+1 & a_1a_2 & \cdots & a_1a_n \\ a_2 & a_2a_1 & a_2^2+1 & \cdots & a_2a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & a_na_1 & a_na_2 & \cdots & a_n^2+1 \end{vmatrix}_{n+1}$$

$$\xlongequal[c_{n+1}-a_nc_1]{\substack{c_2-a_1c_1\\ c_3-a_2c_1\\ \cdots}}\begin{vmatrix} 1 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_n \\ a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}_{n+1} \xlongequal[c_1-a_nc_{n+1}]{\substack{c_1-a_1c_2\\ c_1-a_2c_3\\ \cdots}}\begin{vmatrix} 1+\sum_{i=1}^{n}a_i^2 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_n \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}_{n+1}$$

$$=1+\sum_{i=1}^{n}a_i^2 .$$

1.3.10
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n \\ 1 & 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 \\ 1 & a & 1 & 2 & \cdots & n-2 \\ 1 & a & a & 1 & \cdots & n-3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a & a & a & \cdots & 1 \end{vmatrix} \xlongequal[r_{n-1}-r_n]{\substack{r_1-r_2\\ r_2-r_3\\ \cdots}} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1-a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 1-a & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1-a & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a & a & a & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{按第1列展开}}(-1)^{n+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1-a & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1-a & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-a & 1 \end{vmatrix}_{n-1}$$

$$\xlongequal[r_{n-2}-r_{n-1}]{\substack{r_1-r_2\\ r_2-r_3\\ \cdots}}(-1)^{n+1}\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1-a & a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1-a & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-a & 1 \end{vmatrix}_{n-1} =(-1)^{n+1}a^{n-2} .$$

1.3.11　由行列式的定义有，D 的展开式 $n!$ 项，且每一项为 1 或 -1，设展开式中的正项总数为 a，负项总数为 b，则有

$$D=a-b , \qquad n!=a+b .$$

而

$$D=\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal[i=1,2,\cdots,n-1]{r_i+r_n} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix} =2^{n-1} ,$$

解得 $a=\dfrac{1}{2}(D+n!)=\dfrac{1}{2}(2^{n-1}+n!)$.

1.3.12　由行列式按行展开的性质及推论有

$$\begin{cases}1A_{41}+2A_{42}+1A_{43}+2A_{44}=D_4=-6\\ 2A_{41}+3A_{42}+2A_{43}+3A_{44}=0\end{cases},$$

从而可解得 $A_{41}+A_{43}=18$， $A_{42}+A_{44}=-12$.

1.3.13 $$\begin{vmatrix}a_1^3 & a_1^2b_1 & a_1b_1^2 & b_1^3\\ a_2^3 & a_2^2b_2 & a_2b_2^2 & b_2^3\\ a_3^3 & a_3^2b_3 & a_3b_3^2 & b_3^3\\ a_4^3 & a_4^2b_4 & a_4b_4^2 & b_4^3\end{vmatrix}\xlongequal{\text{每行提取公因式}}a_1^3a_2^3a_3^3a_4^3\begin{vmatrix}1 & \dfrac{b_1}{a_1} & \dfrac{b_1^2}{a_1^2} & \dfrac{b_1^3}{a_1^3}\\ 1 & \dfrac{b_2}{a_2} & \dfrac{b_2^2}{a_2^2} & \dfrac{b_2^3}{a_2^3}\\ 1 & \dfrac{b_3}{a_3} & \dfrac{b_3^2}{a_3^2} & \dfrac{b_3^3}{a_3^3}\\ 1 & \dfrac{b_4}{a_4} & \dfrac{b_4^2}{a_4^2} & \dfrac{b_4^3}{a_4^3}\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{行列式}]{\text{范德蒙德}}a_1^3a_2^3a_3^3a_4^3\left(\frac{b_4}{a_4}-\frac{b_3}{a_3}\right)\left(\frac{b_4}{a_4}-\frac{b_2}{a_2}\right)\left(\frac{b_4}{a_4}-\frac{b_1}{a_1}\right)\left(\frac{b_3}{a_3}-\frac{b_2}{a_2}\right)\left(\frac{b_3}{a_3}-\frac{b_1}{a_1}\right)\left(\frac{b_2}{a_2}-\frac{b_1}{a_1}\right)$$

$$=(a_3b_4-a_4b_3)(a_2b_4-a_4b_2)(a_1b_4-a_4b_1)(a_2b_3-a_3b_2)(a_1b_3-a_3b_1)(a_1b_2-a_2b_1)\ .$$

1.3.14

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1+\cos\phi_1 & 1+\cos\phi_2 & 1+\cos\phi_3 & 1+\cos\phi_4\\ \cos\phi_1+\cos^2\phi_1 & \cos\phi_2+\cos^2\phi_2 & \cos\phi_3+\cos^2\phi_3 & \cos\phi_4+\cos^2\phi_4\\ \cos^2\phi_1+\cos^3\phi_1 & \cos^2\phi_2+\cos^3\phi_2 & \cos^2\phi_3+\cos^3\phi_3 & \cos^2\phi_4+\cos^3\phi_4\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_4-r_3]{\substack{r_2-r_1\\ r_3-r_2}}\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ \cos\phi_1 & \cos\phi_2 & \cos\phi_3 & \cos\phi_4\\ \cos^2\phi_1 & \cos^2\phi_2 & \cos^2\phi_3 & \cos^2\phi_4\\ \cos^3\phi_1 & \cos^3\phi_2 & \cos^3\phi_3 & \cos^3\phi_4\end{vmatrix}=\prod_{1\leqslant j<i\leqslant 4}(\cos\phi_i-\cos\phi_j)\ .$$

1.3.15 由题意

$$\begin{vmatrix}1+x_1 & 1+x_1^2 & \cdots & 1+x_1^n\\ 1+x_2 & 1+x_2^2 & \cdots & 1+x_2^n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1+x_n & 1+x_n^2 & \cdots & 1+x_n^n\end{vmatrix}\xlongequal{\text{升阶}}\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1+x_1 & 1+x_1^2 & \cdots & 1+x_1^n\\ 1 & 1+x_2 & 1+x_2^2 & \cdots & 1+x_2^n\\ 1 & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & 1+x_n & 1+x_n^2 & \cdots & 1+x_n^n\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,3,\cdots,n+1]{c_i-c_1}\begin{vmatrix}1 & -1 & -1 & -1 & -1\\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n\\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n\\ 1 & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n\\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n\\ 1 & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n\\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n\\ 1 & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n\end{vmatrix}$$

$$=2\prod_{i=1}^{n}x_i\prod_{1\leqslant j<k\leqslant n}(x_k-x_j)-\prod_{i=1}^{n}(x_i-1)\prod_{1\leqslant j<k\leqslant n}(x_k-x_j)$$

$$=\prod_{1\leqslant j<k\leqslant n}(x_k-x_j)\left[2\prod_{i=1}^{n}x_i-\prod_{i=1}^{n}(x_i-1)\right].$$

1.3.16　排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 中必含有1，若1在排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 中的逆序个数为个 s，则其在排列 $i_ni_{n-1}\cdots i_1$ 中的逆序个数为 $n-s-1$，从而1在排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 与 $i_ni_{n-1}\cdots i_1$ 的逆序个数和为 $n-1$，即 $1,2,\cdots,n$ 中比1大的数字个数；类似的2在排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 与 $i_ni_{n-1}\cdots i_1$ 的逆序个数和为 $n-2$，依此类推，n 在排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 与 $i_ni_{n-1}\cdots i_1$ 的逆序个数和为0，所以 $i_1i_2\cdots i_n$ 与 $i_ni_{n-1}\cdots i_1$ 的逆序数和为 $1+2+\cdots+(n-1)=\dfrac{n(n-1)}{2}$.

1.3.17　设反对称行列式 $D=\begin{vmatrix}0&a_{12}&a_{13}&\cdots&a_{1n}\\-a_{12}&0&a_{23}&\cdots&a_{2n}\\-a_{13}&-a_{23}&0&\cdots&a_{3n}\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\-a_{1n}&-a_{2n}&-a_{3n}&\cdots&0\end{vmatrix}$，其中的 n 为奇数，则

$$D=\begin{vmatrix}0&a_{12}&a_{13}&\cdots&a_{1n}\\-a_{12}&0&a_{23}&\cdots&a_{2n}\\-a_{13}&-a_{23}&0&\cdots&a_{3n}\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\-a_{1n}&-a_{2n}&-a_{3n}&\cdots&0\end{vmatrix}\xlongequal{\text{每行提}(-1)}(-1)^n\begin{vmatrix}0&-a_{12}&-a_{13}&\cdots&-a_{1n}\\a_{12}&0&-a_{23}&\cdots&-a_{2n}\\a_{13}&a_{23}&0&\cdots&-a_{3n}\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{1n}&a_{2n}&a_{3n}&\cdots&0\end{vmatrix}=(-1)^nD^{\mathrm{T}},$$

再由 $D=D^{\mathrm{T}}$，从而 $D=(-1)^nD^{\mathrm{T}}=-D^{\mathrm{T}}$，故 $D=0$.

1.3.18　由行列式的性质有

$$\begin{vmatrix}a+x&b+y&c+z\\a_1+x&b_1+y&c_1+z\\a_2+x&b_2+y&c_2+z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a&b&c\\a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x&b&c\\x&b_1&c_1\\x&b_2&c_2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a&y&c\\a_1&y&c_1\\a_2&y&c_2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a&b&z\\a_1&b_1&z\\a_2&b_2&z\end{vmatrix}$$

$$=D+x\begin{vmatrix}1&b&c\\1&b_1&c_1\\1&b_2&c_2\end{vmatrix}+y\begin{vmatrix}a&1&c\\a_1&1&c_1\\a_2&1&c_2\end{vmatrix}+z\begin{vmatrix}a&b&1\\a_1&b_1&1\\a_2&b_2&1\end{vmatrix}$$

$$=D+x\sum_{i=1}^{3}A_{i1}+y\sum_{i=1}^{3}A_{i2}+z\sum_{i=1}^{3}A_{i3}.$$

1.5　综合提高训练

例 1.5.1　【2015（1）】n 阶行列式 $\begin{vmatrix}2&0&\cdots&0&2\\-1&2&\cdots&0&2\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&2&2\\0&0&\cdots&-1&2\end{vmatrix}=$________.

解　记 $D_n=\begin{vmatrix} 2 & 0 & \cdots & 0 & 2 \\ -1 & 2 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{vmatrix}$，则由行列式展开公式有

$$\begin{aligned} D_n &= 2D_{n-1}+(-1)^{n+1}2(-1)^{n-1}=2D_{n-1}+2 \\ &= 2(2D_{n-2}+2)+2=2^2D_{n-2}+2^2+2 \\ &= 2^n+2^{n-1}+\cdots+2=2^{n+1}-2. \end{aligned}$$

例 1.5.2　【2016（1，3）】行列式 $\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 4 & 3 & 2 & \lambda+1 \end{vmatrix}=$________.

解　由题意

$$\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 4 & 3 & 2 & \lambda+1 \end{vmatrix}=\lambda\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 3 & 2 & \lambda+1 \end{vmatrix}+4\times(-1)^{4+1}\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \end{vmatrix}$$

$$=\lambda^4+\lambda^3+2\lambda^2+3\lambda+4.$$

例 1.5.3　设 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$，$a$ 为任意实数，证明：$|\boldsymbol{E}-a\boldsymbol{xy}|=1-a\boldsymbol{yx}$.

证　由题意

$$|\boldsymbol{E}-a\boldsymbol{xy}|=\begin{vmatrix} 1-ax_1y_1 & -ax_1y_2 & \cdots & -ax_1y_n \\ -ax_2y_1 & 1-ax_2y_2 & \cdots & -ax_2y_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -ax_ny_1 & -ax_ny_2 & \cdots & 1-ax_ny_n \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{升阶}}{=\!=\!=}\begin{vmatrix} 1 & y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ 0 & 1-ax_1y_1 & -ax_1y_2 & \cdots & -ax_1y_n \\ 0 & -ax_2y_1 & 1-ax_2y_2 & \cdots & -ax_2y_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & -ax_ny_1 & -ax_ny_2 & \cdots & 1-ax_ny_n \end{vmatrix}\underset{i=2,3,\cdots,n+1}{\overset{r_i+ax_{i-1}r_1}{=\!=\!=\!=\!=}}\begin{vmatrix} 1 & y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ ax_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ ax_2 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ ax_n & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$\underset{i=2,3,\cdots,n+1}{\overset{c_1-ax_{i-1}c_i}{=\!=\!=\!=\!=}}\begin{vmatrix} 1-\sum_{i=1}^{n}ax_iy_i & y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}=1-\sum_{i=1}^{n}ax_iy_i=1-a\boldsymbol{yx}.$$

例 1.5.4　计算行列式 $D_n=\begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & a+b & ab & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a+b \end{vmatrix}$（其中 $a\neq b$）.

解

$$D_n \xlongequal{\text{按第1列分解}} \begin{vmatrix} a & ab & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & a+b & ab & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a+b \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & ab & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a+b & ab & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a+b \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{后行列式展开}]{\substack{\text{前行列式}\\ c_i-bc_{i-1}}} \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a \end{vmatrix} + b\begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a+b & ab & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & a+b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a+b \end{vmatrix}_{n-1}$$

$$=a^n+bD_{n-1},$$

从而有 $D_n=a^n+bD_{n-1}$，类似的还可以

$$D_n \xlongequal{\text{按第1列分解}} \begin{vmatrix} b & ab & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & a+b & ab & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a+b \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & ab & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a+b & ab & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a+b \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{后行列式展开}]{\substack{\text{前行列式}\\ c_i-ac_{i-1}}} \begin{vmatrix} b & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & b \end{vmatrix} + a\begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a+b & ab & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & a+b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a+b \end{vmatrix}_{n-1}$$

$$=b^n+aD_{n-1},$$

得到 $D_n=b^n+aD_{n-1}$，从而有

$$\begin{cases} D_n=a^n+bD_{n-1} \\ D_n=b^n+aD_{n-1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} aD_n=a^{n+1}+abD_{n-1} \\ bD_n=b^{n+1}+abD_{n-1} \end{cases} \Rightarrow (a-b)D_n=a^{n+1}-b^{n+1},$$

再由 $a\neq b$，解得 $D_n=\dfrac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}$.

例 1.5.5　计算行列式 $D_n=\begin{vmatrix} x & y & y & \cdots & y & y \\ z & x & y & \cdots & y & y \\ z & z & x & \cdots & y & y \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ z & z & z & \cdots & x & y \\ z & z & z & \cdots & z & x \end{vmatrix}$.

解

$$\begin{vmatrix} x & y & y & \cdots & y & y \\ z & x & y & \cdots & y & y \\ z & z & x & \cdots & y & y \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ z & z & z & \cdots & x & y \\ z & z & z & \cdots & z & x \end{vmatrix} \xlongequal[\substack{\cdots \\ r_2-r_1}]{\substack{r_n-r_{n-1} \\ r_{n-1}-r_{n-2}}} \begin{vmatrix} x & y & y & \cdots & y & y \\ z-x & x-y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & z-x & x-y & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & z-x & x-y \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\substack{\cdots \\ c_{n-1}-c_n}]{\substack{c_1-c_2 \\ c_2-c_3}} \begin{vmatrix} x-y & 0 & 0 & \cdots & 0 & y \\ z-2x+y & x-y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -z+x & z-2x+y & x-y & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & z-2x+y & x-y \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{1+n}y\begin{vmatrix} z-2x+y & x-y & & 0 \\ -z+x & z-2x+y & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & x-y \\ 0 & & -z+x & z-2x+y \end{vmatrix}_{n-1}$$

$$+(-1)^{n+n}(x-y)\begin{vmatrix} x-y & & & 0 \\ z-2x+y & x-y & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & z-2x+y & x-y \end{vmatrix}_{n-1}$$

$$=y\begin{vmatrix} 2x\text{-}y\text{-}z & y-x & & 0 \\ z-x & 2x\text{-}y\text{-}z & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & y-x \\ 0 & & z-x & 2x\text{-}y\text{-}z \end{vmatrix}_{n-1}$$

$$+(x-y)\begin{vmatrix} x-y & & & 0 \\ z-2x+y & x-y & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & z-2x+y & x-y \end{vmatrix}_{n-1}$$

$$=\ y\Delta_{n-1}+(x-y)^n,$$

而对于其中的 Δ_{n-1}，利用本章例 1.2.16 的方法有

$$\begin{cases}\Delta_{n-1}=(x-y)^{n-1}+(x-z)\Delta_{n-2}\\ \Delta_{n-1}=(x-z)^{n-1}+(x-y)\Delta_{n-2}\end{cases},$$

解得当 $y \neq z$ 时，$\Delta_{n-1}=\dfrac{(x-y)^n-(x-z)^n}{z-y}$，代回有

$$D_n = y\frac{(x-y)^n-(x-z)^n}{z-y}+(x-y)^n=\frac{z(x-y)^n-y(x-z)^n}{z-y},$$

当 $y=z$ 时 $\Delta_{n-1}=n(x-y)^{n-1}$，代回有

$$D_n = ny(x-y)^{n-1}+(x-y)^n=[x+(n-1)y](x-y)^{n-1}.$$

第 2 章 矩　　阵

2.1 知 识 要 点

2.1.1 矩阵的概念

将 m 行 n 列的数表称为 $m\times n$ **矩阵**，其中 $m\times n$ 称为矩阵的**型**；若两个矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的型相同，则称 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 为**同型矩阵**；对于两个同型矩阵，若它们对应位置的元素分别相等，则称两个**矩阵相等**；矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，称 $(-a_{ij})_{m\times n}$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**负矩阵**，记为 $-\boldsymbol{A}$.

一些特殊的矩阵：

（1）**零矩阵**：矩阵的所有元素都为 0 .

（2）**单位矩阵**：对角线元素均为 1，其余位置的元素均为 0 的方阵，一般记为 $\boldsymbol{E}$.

（3）**数量矩阵**：对角线元素相同，其余位置的元素均为 0 的方阵.

（4）**对角矩阵**：非对角线元素均为 0 的方阵.

（5）**上（下）三角形矩阵**：设矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$，若 $\boldsymbol{A}$ 满足 $a_{ij}=0$ ($i>j,\ i,j=1,2,\cdots,n$)，则称 $\boldsymbol{A}$ 为上三角矩阵；若 $\boldsymbol{A}$ 满足 $a_{ij}=0$ ($i<j,\ \ i,j=1,2,\cdots,n$)，则称 $\boldsymbol{A}$ 为下三角矩阵.

（6）**对称（反对称）矩阵**：设矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$，若 $\boldsymbol{A}$ 满足 $a_{ij}=a_{ji}$ ($i,j=1,2,\cdots,n$)，则称 $\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵；若 $\boldsymbol{A}$ 满足 $a_{ij}=-a_{ji}$ ($i,j=1,2,\cdots,n$)，则称 $\boldsymbol{A}$ 为反对称矩阵．显然，反对称矩阵的对角线上元素都为零.

2.1.2 矩阵的运算

（1）加法　若矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$， $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$，则称阵 $(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的和，记为 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$.

（2）数量乘法　设 k 为常数，矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，则称矩阵 $(ka_{ij})_{m\times n}$ 为数与矩阵的数量乘法，记为 $k\boldsymbol{A}$.

矩阵的加法和数量乘法统称为**矩阵的线性运算**，矩阵的线性运算满足的性质：

1） $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$；　2） $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$；

3） $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{O}=\boldsymbol{A}$；　4） $\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}$；

5） $1\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$；　6） $k(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=k\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{B}$；

7） $(k+l)\boldsymbol{A}=k\boldsymbol{A}+l\boldsymbol{A}$；　8） $k(l\boldsymbol{A})=(kl)\boldsymbol{A}$.

（3）矩阵乘法　若矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times s}$， $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{s\times n}$，称矩阵 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{m\times n}$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的乘积，记为 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}$，其中 $c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}$．矩阵的乘法运算满足的性质：

1） $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$；　2） $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AC}+\boldsymbol{BC}$；

3） $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\boldsymbol{CA}+\boldsymbol{CB}$；　4） $k(\boldsymbol{AB})=(k\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}(k\boldsymbol{B})$.

注　矩阵的乘法一般不满足交换律、消去律，若矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$，则称 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是可交换的.

（4）方阵的幂　若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为方阵，可定义矩阵的乘幂. 规定

$$\boldsymbol{A}^0=\boldsymbol{E}，\quad \boldsymbol{A}^n=\underbrace{\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{A}\cdots\boldsymbol{A}}_{n\text{个}}\quad（n\text{ 为自然数}）.$$

矩阵的幂运算满足的运算性质：

1）$\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{A}^l=\boldsymbol{A}^{k+l}$；　　2）$\left(\boldsymbol{A}^k\right)^l=\boldsymbol{A}^{kl}$（$k,l$ 为自然数）.

（5）矩阵的转置　若 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，则称矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**转置矩阵**，记为 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$. 矩阵转置的运算性质：

1）$\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$；　　2）$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$；

3）$(k\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}=k\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$；　　4）$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

（6）方阵的行列式　若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为方阵，由 $\boldsymbol{A}$ 中元素按原顺序构成的行列式，称为方阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式，记为 $|\boldsymbol{A}|$. 方阵的行列式满足的运算性质：

1）$\left|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right|=|\boldsymbol{A}|$；　　2）$|k\boldsymbol{A}|=k^n|\boldsymbol{A}|$（$n$ 为方阵 $\boldsymbol{A}$ 的阶数，k 为常数）；

3）$|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$（$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为同阶方阵）.

2.1.3　伴随矩阵

设有方阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$，$\boldsymbol{A}_{ij}$ 为 a_{ij} 的代数余子式，称矩阵

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{21} & \cdots & \boldsymbol{A}_{n1} \\ \boldsymbol{A}_{12} & \boldsymbol{A}_{22} & \cdots & \boldsymbol{A}_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{A}_{1n} & \boldsymbol{A}_{2n} & \cdots & \boldsymbol{A}_{nn} \end{pmatrix}$$

为 $\boldsymbol{A}$ 的**伴随矩阵**，记为 $\boldsymbol{A}^*$. 注意伴随矩阵的构成方式，元素 a_{ij} 的代数余子式 $\boldsymbol{A}_{ij}$ 应该放在 $\boldsymbol{A}^*$ 的 (j,i) 位置. 由伴随矩阵的定义可知，对于任意的方阵 $\boldsymbol{A}$，有

$$\boldsymbol{AA}^*=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}.$$

2.1.4　可逆矩阵

对于方阵 $\boldsymbol{A}$，若存在同阶方阵 $\boldsymbol{B}$，使得 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为**可逆矩阵**，或称 $\boldsymbol{A}$ **可逆**，并称 $\boldsymbol{B}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的**逆矩阵**.

矩阵的逆满足的运算性质：

1）$\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{-1}=\boldsymbol{A}$；

2）$(k\boldsymbol{A})^{-1}=\dfrac{1}{k}\boldsymbol{A}^{-1}\quad(k\neq 0)$；

3）$(\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$；

4）$\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}=\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{\mathrm{T}}$；

5）$\left|\boldsymbol{A}^{-1}\right|=|\boldsymbol{A}|^{-1}$.

逆矩阵的几个主要结论：

1）若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵唯一；

2）矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆的充分必要条件是 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$，且 $\boldsymbol{A}$ 可逆时，$\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^{*}$；

3）若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$（或 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}$），则 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^{-1}$；

4）当 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 可逆时，$\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

2.1.5　矩阵分块

将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 用一些横线和竖线分成若干个小矩阵，每个小矩阵称为 $\boldsymbol{A}$ 的一个子块，以子块为元素的矩阵称为 $\boldsymbol{A}$ 的**分块矩阵**.

几种特殊的分块矩阵如下.

（1）若方阵 $\boldsymbol{A}$ 经分块后可以表示为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{O} & \cdots & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_2 & \cdots & \boldsymbol{O} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \cdots & \boldsymbol{A}_m \end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{A}_i\ (i=1,2,\cdots,m)$ 均为方阵，则称 $\boldsymbol{A}$ 为**分块对角矩阵**.

（2）若方阵 $\boldsymbol{A}$ 经分块后可以表示为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \cdots & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_1 \\ \boldsymbol{O} & \cdots & \boldsymbol{A}_2 & \boldsymbol{O} \\ \vdots & ⋰ & \vdots & \vdots \\ \boldsymbol{A}_m & \cdots & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{A}_i\ (i=1,2,\cdots,m)$ 均为方阵，则称 $\boldsymbol{A}$ 为**分块反对角矩阵**.

（3）若方阵 $\boldsymbol{A}$ 经分块后可以表示为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1m} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_{22} & \cdots & \boldsymbol{A}_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \cdots & \boldsymbol{A}_{mm} \end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{A}_{ii}\ (i=1,2,\cdots,m)$ 均为方阵，则称 $\boldsymbol{A}$ 为**分块上三角矩阵**.

（4）若方阵 $\boldsymbol{A}$ 经分块后可以表示为

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & O & \cdots & O \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mm} \end{pmatrix},$$

其中 $A_{ii}\ (i=1,2,\cdots,m)$ 均为方阵，则称 A 为**分块下三角矩阵**.

2.1.6　分块矩阵的运算

（1）加法　若 $A+B$ 有意义，对 A,B 进行相同的分块后得到的分块矩阵可以相加，并且加法表现为对应的子块相加.

（2）数量乘法　数与分块矩阵的乘法表现为数乘到每个子块上.

（3）矩阵乘法　若 AB 有意义，对 A,B 进行分块时只要 A 的列分割方式与 B 的行分割方式相同，得到分块矩阵可以相乘，并且乘法与普通矩阵的乘法运算一致.

（4）转置　把分块矩阵行上的子块换到同序数的列上，再对每个子块取转置，得到的矩阵称为分块矩阵的转置矩阵.

（5）分块矩阵的行列式　对于分块对角矩阵，分块上（下）三角矩阵，它们的行列式都等于对角线上子块的行列式相乘，即

$$\begin{vmatrix} A_{11} & & & O \\ & A_{22} & & \\ & & \ddots & \\ O & & & A_{mm} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1m} \\ O & A_{22} & \cdots & A_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ O & O & \cdots & A_{mm} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} A_{11} & O & \cdots & O \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mm} \end{vmatrix}=|A_1||A_2|\cdots|A_m|.$$

（6）分块矩阵的逆矩阵

1）若分块对角矩阵 $A=\begin{pmatrix} A_1 & & & O \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & A_m \end{pmatrix}$ 可逆，则 $A^{-1}=\begin{pmatrix} A_1^{-1} & & & O \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ O & & & A_m^{-1} \end{pmatrix}$；

2）若分块反对角矩阵 $A=\begin{pmatrix} O & & & A_1 \\ & & A_2 & \\ & \iddots & & \\ A_m & & & O \end{pmatrix}$ 可逆，则 $A^{-1}=\begin{pmatrix} O & & & A_m^{-1} \\ & & \iddots & \\ & A_2^{-1} & & \\ A_1^{-1} & & & O \end{pmatrix}$；

3）若分块上三角矩阵 $\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}$ 可逆，则其逆为 $\begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \\ O & B^{-1} \end{pmatrix}$；

4）若分块下三角矩阵 $\begin{pmatrix} A & O \\ C & B \end{pmatrix}$ 可逆，则其逆为 $\begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ -B^{-1}CA^{-1} & B^{-1} \end{pmatrix}$.

2.1.7　线性方程组

含有 n 个未知数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases},$$

称为 n **元线性方程组**，其中，a_{ij} $(i=1,2,\cdots,m; j=1,2,\cdots n)$ 称为未知数的**系数**，b_i $(i=1,2,\cdots,m)$ 为**常数项**．若常数项 b_i $(i=1,2,\cdots,m)$ 全为零，称线性方程组为**齐次线性方程组**，否则称其为**非齐次线性方程组**．利用矩阵乘法，n 元线性方程组可以表示为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的形式，其中的

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

称 $\boldsymbol{A}$ 为线性方程组的**系数矩阵**．对于 n 个未知数、n 个方程的线性方程组有：

克拉默法则　若线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式不等于 0，则该线性方程组有且只有唯一解，并且其解可表示为

$$x_1=\frac{|\boldsymbol{A}_1|}{|\boldsymbol{A}|}, x_2=\frac{|\boldsymbol{A}_2|}{|\boldsymbol{A}|}, \cdots, x_n=\frac{|\boldsymbol{A}_n|}{|\boldsymbol{A}|},$$

其中，$\boldsymbol{A}_j$ 为将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 j 列元素 $a_{1j}, a_{2j}, \cdots, a_{nj}$ 对应换成 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 得到的矩阵．

由克拉默法则容易得到如下结论：

（1）如果非齐次线性方程组的系数矩阵的行列式不等于零，则其有唯一解．反之，若非齐次线性方程组无解或解不唯一，则它的系数矩阵的行列式为零．

（2）如果齐次线性方程组的系数矩阵的行列式不等于零，则其只有零解．反之，若齐次线性方程组有非零解，则它的系数矩阵的行列式为零．

2.2　典型例题分析

2.2.1　题型一、矩阵的乘法及乘法的运算规律

例 2.2.1　证明：两个上三角形矩阵的乘积是上三角形矩阵；上三角形矩阵的伴随矩阵是上三角形矩阵，若其可逆，则其逆矩阵也是上三角形矩阵．

证　不妨设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix},$$

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行元素为 $0,0,\cdots,0,a_{ii},a_{i,i+1},\cdots,a_{in}$，矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的第 j 列元素为 $b_{1j},b_{2j},\cdots,b_{jj},0,\cdots,0$，当 $i>j$ 时，矩阵 $\boldsymbol{AB}$ 的 (i,j) 位置元素 $a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}$，显然为零，故 $\boldsymbol{AB}$ 为上三角形矩阵．

由于 $\boldsymbol{A}$ 为上三角形，因此当 $i<j$ 时，$|\boldsymbol{A}|$ 中元素 a_{ij} 的余子式 M_{ij} 为上三角行列式，且主对角线中含有 0 元素（$a_{ii}=a_{i+1,i+1}=\cdots=a_{jj}=0$），即

$$M_{ij}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,i-1} & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{i-1,i-1} & a_{i-1,i+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{i-1,i-1}0\cdots 0a_{j+1,j+1}\cdots a_{nn}=0,$$

进而 a_{ij} 的代数余子式 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}=0$，再由 $\boldsymbol{A}^*$ 的定义可知 $\boldsymbol{A}^*$ 为上三角形矩阵．当 $\boldsymbol{A}$ 可逆时，由 $\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*$ 可知，$\boldsymbol{A}^{-1}$ 也是上三角形矩阵．

例 2.2.2 已知 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}-\dfrac{2}{\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$，其中 $\boldsymbol{\alpha}$ 为行矩阵，证明：$\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵，且 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}$．

解 由于

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\left(\boldsymbol{E}-\frac{2}{\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}\right)^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}-\frac{2}{\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}}\left(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}\right)^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}-\frac{2}{\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}-\frac{2}{\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{A},$$

故 $\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵．进而

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}&=\left(\boldsymbol{E}-\frac{2}{\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}\right)\left(\boldsymbol{E}-\frac{2}{\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}\right)=\boldsymbol{E}-\frac{4}{\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}+\left(\frac{2}{\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}}\right)^2(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})\\&=\boldsymbol{E}-\frac{4}{\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}+\frac{4}{\left(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\right)^2}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{E}-\frac{4}{\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}+\frac{4}{\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{E},\end{aligned}$$

命题得证．

例 2.2.3 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 分别为3阶实对称矩阵与反实对称矩阵，且满足 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{B}^2$，证明 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$．

证 不妨设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 0 & b_{12} & b_{13} \\ -b_{12} & 0 & b_{23} \\ -b_{13} & -b_{23} & 0 \end{pmatrix},$$

则

$$\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}^2+a_{12}^2+a_{13}^2 & & * \\ & a_{12}^2+a_{22}^2+a_{23}^2 & \\ * & & a_{13}^2+a_{23}^2+a_{33}^2 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{B}^2=\begin{pmatrix} 0 & b_{12} & b_{13} \\ -b_{12} & 0 & b_{23} \\ -b_{13} & -b_{23} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & b_{12} & b_{13} \\ -b_{12} & 0 & b_{23} \\ -b_{13} & -b_{23} & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -(b_{12}^2+b_{13}^2) & & * \\ & -(b_{12}^2+b_{23}^2) & \\ * & & -(b_{13}^2+b_{23}^2) \end{pmatrix},$$

由于 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{B}^2$，因此有

$$a_{11}^2+a_{12}^2+a_{13}^2=-(b_{12}^2+b_{13}^2),$$

从而 $a_{11}=a_{12}=a_{13}=b_{12}=b_{13}=0$，类似地可得到 $a_{22}=a_{23}=a_{33}=b_{23}=0$，故 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$.

例 2.2.4　【1994（1）】已知 $\boldsymbol{\alpha}=(1,2,3)$，$\boldsymbol{\beta}=\left(1,\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3}\right)$，设 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}$，其中 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{\alpha}$ 的转置，则 $\boldsymbol{A}^n=$__________.

解　由题意有

$$\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}=(1,2,3)\begin{pmatrix}1\\ \dfrac{1}{2}\\ \dfrac{1}{3}\end{pmatrix}=1+1+1=3,\qquad \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\left(1,\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3}\right)=\begin{pmatrix}1&\dfrac{1}{2}&\dfrac{1}{3}\\ 2&1&\dfrac{2}{3}\\ 3&\dfrac{3}{2}&1\end{pmatrix},$$

由于 $\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}=\left(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}}=3$，因此

$$\boldsymbol{A}^n=\left(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}\right)^n=(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta})\cdots(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\underbrace{(\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})\cdots(\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})}_{n-1}\boldsymbol{\beta}=3^{n-1}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=3^{n-1}\begin{pmatrix}1&\dfrac{1}{2}&\dfrac{1}{3}\\ 2&1&\dfrac{2}{3}\\ 3&\dfrac{3}{2}&1\end{pmatrix}.$$

例 2.2.5　【1999（3）】设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$，$n\geqslant 2$ 为正整数，则 $\boldsymbol{A}^n-2\boldsymbol{A}^{n-1}=$__________.

解　由于

$$\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&2\\0&4&0\\2&0&2\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}=2\boldsymbol{A},$$

从而

$$\boldsymbol{A}^n-2\boldsymbol{A}^{n-1}=\boldsymbol{A}^{n-2}(\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}.$$

例 2.2.6　设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a&b&c\\0&a&b\\0&0&a\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^n$.（$n\geqslant 2$）

解　记 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&b&c\\0&0&b\\0&0&0\end{pmatrix}$，则

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a&b&c\\0&a&b\\0&0&a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&b&c\\0&0&b\\0&0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a&0&0\\0&a&0\\0&0&a\end{pmatrix}=\boldsymbol{B}+a\boldsymbol{E},$$

由于 $\boldsymbol{E}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 可交换，因此

$$\boldsymbol{A}^n=(\boldsymbol{B}+a\boldsymbol{E})^n=C_n^0\boldsymbol{B}^0(a\boldsymbol{E})^n+C_n^1\boldsymbol{B}^1(a\boldsymbol{E})^{n-1}+C_n^2\boldsymbol{B}^2(a\boldsymbol{E})^{n-2}+\cdots+C_n^n\boldsymbol{B}^n(a\boldsymbol{E})^0,$$

而

$$\boldsymbol{B}^2=\begin{pmatrix}0&b&c\\0&0&b\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&b&c\\0&0&b\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&b^2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{B}^3=\begin{pmatrix}0&0&b^2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&b&c\\0&0&b\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\boldsymbol{O},$$

故

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^n&=C_n^0(a\boldsymbol{E})^n\boldsymbol{B}^0+C_n^1(a\boldsymbol{E})^{n-1}\boldsymbol{B}^1+C_n^2(a\boldsymbol{E})^{n-2}\boldsymbol{B}^2\\&=a^n\boldsymbol{E}+na^{n-1}\boldsymbol{EB}+\frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}\boldsymbol{EB}^2\\&=\begin{pmatrix}a^n&0&0\\0&a^n&0\\0&0&a^n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&na^{n-1}b&na^{n-1}c\\0&0&na^{n-1}b\\0&0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&\frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}b^2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}a^n&na^{n-1}b&na^{n-1}c+\frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}b^2\\0&a^n&na^{n-1}b\\0&0&a^n\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

2.2.2　题型二、伴随矩阵的相关问题

认真把握伴随矩阵的定义，注意用代数余子式构造伴随矩阵方式，特别记住 2 阶方阵伴随矩阵的写法，即“主对角线上元素互换，副对角线上元素变号”；涉及伴随矩阵的计算与证明，一般应从具体问题出发，并结合公式 $\boldsymbol{AA}^*=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$ 进行分析，特别地，当矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆时，其伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 常用 $|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$ 替换.

例 2.2.7　【2005（3）】设矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{3\times3}$ 满足 $\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$，其中 $\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵. 若 a_{11},a_{12},a_{13} 为三个相等的正数，则 a_{11} 为（　　）.

（A）$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$；　（B）3；　（C）$\dfrac{1}{3}$；　（D）$\sqrt{3}$.

解　由 $\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$，有

$$|\boldsymbol{AA}^*|=|\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{A}|^2,$$

再由 $\boldsymbol{AA}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$，以及 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵，有

$$\left|AA^*\right|=\left\|A\right|E\right|=\left|A\right|^3,$$

从而有$|A|=1$或$|A|=0$，因为

$$|A|=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}=a_{11}^2+a_{12}^2+a_{13}^2=3a_{11}^2\neq 0,$$

故$|A|=1$，进而解得$a_{11}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，因此本题选择（A）.

例 2.2.8 【2009（1，3）】设A^*，B^*分别为2阶矩阵A，B的伴随矩阵，若$|A|=2$，$|B|=3$，则分块矩阵$\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}$的伴随矩阵为（　　）.

（A）$\begin{pmatrix} O & 3B^* \\ 2A^* & O \end{pmatrix}$；　　（B）$\begin{pmatrix} O & 2B^* \\ 3A^* & O \end{pmatrix}$；

（C）$\begin{pmatrix} O & 3A^* \\ 2B^* & O \end{pmatrix}$；　　（D）$\begin{pmatrix} O & 2A^* \\ 3B^* & O \end{pmatrix}$.

解　由于$\begin{vmatrix} O & A \\ B & O \end{vmatrix}=(-1)^{2+2}|A||B|=2\times 3=6\neq 0$，故$\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}$可逆，从而

$$\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^*=\begin{vmatrix} O & A \\ B & O \end{vmatrix}\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^{-1}=6\begin{pmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} O & 6B^{-1} \\ 6A^{-1} & O \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} O & 2|B|B^{-1} \\ 3|A|A^{-1} & O \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} O & 2B^* \\ 3A^* & O \end{pmatrix}.$$

所以本题选择（B）.

例 2.2.9 　【1996（4）】设A为$n\,(n\geqslant 2)$阶非奇异矩阵，A^*是A的伴随矩阵，则$\left(A^*\right)^*$等于（　　）.

（A）$|A|^{n-1}A$；　（B）$|A|^{n+1}A$；　（C）$|A|^{n-2}A$；　（D）$|A|^{n+2}A$.

解　由于$AA^*=|A|E$，以及A为非奇异矩阵，有$A^*=|A|A^{-1}$，进而

$$\left(A^*\right)^*=\left|A^*\right|\left(A^*\right)^{-1}=\left\||A|A^{-1}\right|\left(|A|A^{-1}\right)^{-1}=|A|^n\left|A^{-1}\right|\left|A\right|^{-1}\left(A^{-1}\right)^{-1}=|A|^{n-2}A.$$

本题选择（C）.

2.2.3　题型三、矩阵可逆的判定及逆矩阵的求法

矩阵可逆的判定方法主要如下几种.

（1）矩阵的行列式不为零.

（2）两个方阵乘积为单位阵，则两个方阵都可逆且互为逆矩阵.

（3）一个矩阵可以表示为一些可逆矩阵的乘积，则该矩阵可逆.

（4）方阵是满秩的，则其可逆（参见第 3 章）.

（5）方阵的全部特征值不为零，则其可逆（参见第 5 章）.

逆矩阵的求解方法主要有如下几种.

（1）解方程组的方法．这种方法在计算上很麻烦，基本不用．

（2）伴随矩阵的方法．常在证明中使用的公式有：

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}，\quad \boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*，$$

在计算上，这种方法也基本不用，但应记住 2 阶方阵的逆矩阵公式．

（3）矩阵的初等变换的方法．这是求逆计算中主要使用的方法，也是一个重要的考点，必须熟练掌握（参见第 3 章）．

例 2.2.10　讨论矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1+a_1b_1 & 1+a_1b_2 & \cdots & 1+a_1b_n \\ 1+a_2b_1 & 1+a_2b_2 & \cdots & 1+a_2b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1+a_nb_1 & 1+a_nb_2 & \cdots & 1+a_nb_n \end{pmatrix}$ 是否可逆．

解　由于

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1+a_1b_1 & 1+a_1b_2 & \cdots & 1+a_1b_n \\ 1+a_2b_1 & 1+a_2b_2 & \cdots & 1+a_2b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1+a_nb_1 & 1+a_nb_2 & \cdots & 1+a_nb_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & 0 \end{pmatrix},$$

有：当 $n=1$ 时，$|\boldsymbol{A}| = 1+a_1b_1$；当 $n=2$ 时，$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 1 & a_1 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = (a_2-a_1)(b_2-b_1)$；当 $n>2$ 时，

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

因此，当 $n=1$ 时，若 $a_1b_1 \neq -1$，则 $\boldsymbol{A}$ 可逆；当 $n=2$ 时，若 $a_2 \neq a_1$ 且 $b_2 \neq b_1$，$\boldsymbol{A}$ 可逆；而 $n>2$ 时，$\boldsymbol{A}$ 不可逆．

例 2.2.11　【2003（3）】设 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha} = (a, 0, \cdots, 0, a)^{\mathrm{T}}, a<0$；$\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵，矩阵 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E} - \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{E} + \frac{1}{a}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$，其中 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵为 $\boldsymbol{B}$，则 $a =$ ________．

解　由题意

$$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha} = (a, 0, \cdots, a)\begin{pmatrix} a \\ 0 \\ \vdots \\ a \end{pmatrix} = 2a^2，\quad \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ \vdots \\ a \end{pmatrix}(a, 0, \cdots, a) = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & \cdots & a^2 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a^2 & 0 & \cdots & a^2 \end{pmatrix} \neq \boldsymbol{O},$$

由于 $\boldsymbol{B}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵，从而

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{E} - \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})\left(\boldsymbol{E} + \frac{1}{a}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\right) = \boldsymbol{E} - \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} + \frac{1}{a}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} - \frac{1}{a}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$$

$$= \boldsymbol{E} - \boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}} + \frac{1}{a}\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}} - \frac{1}{a}\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{E} - (1 - \frac{1}{a} + 2a)\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}},$$

于是$1-\frac{1}{a}+2a=0$，解得$a=\frac{1}{2}, a=-1$，再由已知$a<0$，所以$a=-1$.

例 2.2.12　设$\boldsymbol{A}$为n阶方阵，且满足$\boldsymbol{A}^2-5\boldsymbol{A}+6\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$，判断$\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E}$与$\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}$是否一定可逆，如果可逆，求出其逆.

解　由$\boldsymbol{A}^2-5\boldsymbol{A}+6\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$整理可得

$$(\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E})\left(\frac{4}{15}\boldsymbol{E}-\frac{1}{30}\boldsymbol{A}\right)=\boldsymbol{E},$$

故$\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E}$必可逆，且有$(\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E})^{-1}=\frac{4}{15}\boldsymbol{E}-\frac{1}{30}\boldsymbol{A}$.

对于矩阵$\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}$，由于$\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{E}$或$\boldsymbol{A}=3\boldsymbol{E}$都满足$\boldsymbol{A}^2-5\boldsymbol{A}+6\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$，并且当$\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{E}$时，$\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}=2\boldsymbol{E}-3\boldsymbol{E}=-\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}$可逆，而$\boldsymbol{A}=3\boldsymbol{E}$时，$\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}=3\boldsymbol{E}-3\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$，$\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}$不可逆，因此$\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}$不一定可逆.

例 2.2.13　已知$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{E}$均为可逆矩阵，证明矩阵$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}^{-1}$及$\left(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}^{-1}\right)^{-1}-\boldsymbol{A}^{-1}$都可逆.

证　由于

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}^{-1}=\boldsymbol{AE}-\boldsymbol{B}^{-1}=\boldsymbol{ABB}^{-1}-\boldsymbol{B}^{-1}=(\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{B}^{-1},$$

故$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}^{-1}$可逆. 又因为

$$\begin{aligned}\left(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}^{-1}\right)^{-1}-\boldsymbol{A}^{-1}&=\left(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}^{-1}\right)^{-1}\boldsymbol{AA}^{-1}-\left(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}^{-1}\right)^{-1}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}^{-1})\boldsymbol{A}^{-1}\\&=\left(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}^{-1}\right)^{-1}[\boldsymbol{A}-(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}^{-1})]\boldsymbol{A}^{-1}=\left(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}^{-1}\right)^{-1}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}^{-1})\boldsymbol{A}^{-1}\\&=\left(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}^{-1}\right)^{-1}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1},\end{aligned}$$

而$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}^{-1}$可逆，因此$\left(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}^{-1}\right)^{-1}-\boldsymbol{A}^{-1}$也可逆.

例 2.2.14　设$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&-1\\3&4&-2\\5&-3&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}^*$是$\boldsymbol{A}$的伴随矩阵，求$\left(\boldsymbol{A}^*\right)^{-1}$.

解　由$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1&2&-1\\3&4&-2\\5&-3&1\end{vmatrix}=1$，有$\boldsymbol{A}$可逆，从而$\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$，因此

$$\left(\boldsymbol{A}^*\right)^{-1}=\left(|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&-1\\3&4&-2\\5&-3&1\end{pmatrix}.$$

例 2.2.15　设可逆矩阵$\boldsymbol{A}$的每行元素之和都等于常数a，证明$a\neq0$，且$\boldsymbol{A}^{-1}$的每行元素之和都等于$\frac{1}{a}$.

证法 1　不妨设 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$，由 A 可逆，有 $|A|\neq 0$，从而

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \xlongequal[i=2,\cdots,n]{c_1+c_i} \begin{vmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{nj} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=a\begin{vmatrix} 1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 1 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\neq 0,$$

故 $a\neq 0$．再由 $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}A^*$，以及 A^* 的第1行元素为 $A_{11},A_{21},\cdots,A_{n1}$ 可知，A^{-1} 的第1行元素之和为

$$\frac{1}{|A|}(A_{11}+A_{21}+\cdots+A_{n1})=\frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} 1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 1 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\frac{1}{|A|}\frac{|A|}{a}=\frac{1}{a},$$

命题得证.

证法 2　若设 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$，则由已知有

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a \\ a \\ \vdots \\ a \end{pmatrix},$$

再由 A 可逆，有 $a\neq 0$，从而

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{a} \\ \frac{1}{a} \\ \vdots \\ \frac{1}{a} \end{pmatrix},$$

由矩阵乘法可知，A^{-1} 的每行元素之和都等于 $\dfrac{1}{a}$.

例 2.2.16　已知 $A=\begin{pmatrix}0&0&1&2\\0&0&1&3\\4&2&0&0\\-1&0&0&0\end{pmatrix}$，求 A 的全部代数余子式之和.

解　由于 A^* 由 A 的全部代数余子式构成，在 A 可逆时，可以利用 $A^*=|A|A^{-1}$ 求出 A^*，再求全部代数余子式之和. 将 A 分块并记为 $\begin{pmatrix}O&A_1\\A_2&O\end{pmatrix}$，其中 $A_1=\begin{pmatrix}1&2\\1&3\end{pmatrix}$，$A_2=\begin{pmatrix}4&2\\-1&0\end{pmatrix}$，

由于 $|A_1|=\begin{vmatrix}1&2\\1&3\end{vmatrix}=1\neq0$，$|A_2|=\begin{vmatrix}4&2\\-1&0\end{vmatrix}=2\neq0$，因此 A_1，A_2 可逆，且

$$A_1^{-1}=\begin{pmatrix}1&2\\1&3\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{|A_1|}\begin{pmatrix}3&-2\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&-2\\-1&1\end{pmatrix},$$

$$A_2^{-1}=\begin{pmatrix}4&2\\-1&0\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{|A_2|}\begin{pmatrix}0&-2\\1&4\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&-2\\1&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-1\\\frac{1}{2}&2\end{pmatrix},$$

从而

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}O&A_1\\A_2&O\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}O&A_2^{-1}\\A_1^{-1}&O\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0&-1\\0&0&\frac{1}{2}&2\\3&-2&0&0\\-1&1&0&0\end{pmatrix}.$$

$$|A|=\begin{vmatrix}0&0&1&2\\0&0&1&3\\4&2&0&0\\-1&0&0&0\end{vmatrix}\xlongequal[r_2\leftrightarrow r_4]{r_1\leftrightarrow r_3}\begin{vmatrix}4&2&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&1&2\\0&0&1&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}4&2\\-1&0\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1&2\\1&3\end{vmatrix}=2,$$

因此

$$A^*=|A|A^{-1}=2\begin{pmatrix}0&0&0&-1\\0&0&\frac{1}{2}&2\\3&-2&0&0\\-1&1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0&-2\\0&0&1&4\\6&-4&0&0\\-2&2&0&0\end{pmatrix},$$

所以$|A|$的全部代数余子式之和为$(-2)+1+4+6+(-4)+(-2)+2=5$.

2.2.4　题型四、矩阵的分块及分块运算

矩阵分块的主要目的是为了简化高阶矩阵运算，要注意分块的方式及分块运算怎么进行．合理分块后，分块矩阵之间的运算与矩阵的运算规则相似，矩阵分块常和矩阵的逆、行列式及矩阵的幂等知识点构成一些综合性题目.

例 2.2.17　【2010（3）】设A，B为3阶矩阵，且$|A|=3$，$|B|=2$，$|A^{-1}+B|=2$，则$|A+B^{-1}|=$______.

解　由题意

$$2=|A^{-1}+B|=|A^{-1}B^{-1}B+A^{-1}AB|=|A^{-1}(B^{-1}+A)B|=|A^{-1}||B^{-1}+A||B|,$$

所以

$$|B^{-1}+A|=2|B^{-1}||A|=2\times\frac{1}{2}\times 3=3.$$

例 2.2.18　【1988（1）】设$A=(\alpha,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4)$，$B=(\beta,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4)$，其中$\alpha,\beta,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4$均为4维列向量，且已知行列式$|A|=4$，$|B|=1$，则$|A+B|=$_______.

解　由题意

$$\begin{aligned}|A+B|&=|\alpha+\beta,2\gamma_2,2\gamma_3,2\gamma_4|=8|\alpha+\beta,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4|\\&=8\left(|\alpha,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4|+|\beta,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4|\right)=8\left(|A|+|B|\right)=40.\end{aligned}$$

例 2.2.19　已知$A=\begin{pmatrix}1&2&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&-3\\0&0&-1&3\end{pmatrix}$，求$|A^6|$和$A^8$.

解　依题意，记$A_1=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}$，$A_2=\begin{pmatrix}1&-3\\-1&3\end{pmatrix}$，则$A=\begin{pmatrix}A_1&O\\O&A_2\end{pmatrix}$，对于$A_1$有，$|A_1|=1$，且

$$A_1^2=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\times2\\0&1\end{pmatrix},\quad A_1^3=\begin{pmatrix}1&3\times2\\0&1\end{pmatrix},\quad\cdots,\quad A_1^8=\begin{pmatrix}1&8\times2\\0&1\end{pmatrix};$$

对于A_2有$|A_2|=0$，且

$$\begin{aligned}A_2^8&=\begin{pmatrix}1&-3\\-1&3\end{pmatrix}^8=\left(\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-3\end{pmatrix}\right)^8=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\underbrace{\left(\begin{pmatrix}1&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right)\cdots\left(\begin{pmatrix}1&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right)}_{7个}\begin{pmatrix}1&-3\end{pmatrix}\\&=4^7\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-3\end{pmatrix}=4^7A_2,\end{aligned}$$

因此，

$$|A^6|=|A|^6=\begin{vmatrix}A_1&O\\O&A_2\end{vmatrix}^6=\left(|A_1||A_2|\right)^6=0,$$

$$A^8=\begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{pmatrix}^8=\begin{pmatrix} A_1^8 & O \\ O & A_2^8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 8\times 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4^7\times 1 & -4^7\times 3 \\ 0 & 0 & -4^7\times 1 & 4^7\times 3 \end{pmatrix}.$$

例 2.2.20　【1997（3）】设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶非奇异矩阵，$\boldsymbol{\alpha}$ 为 n 维列向量，b 为常数，记分块矩阵

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{E} & 0 \\ -\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^* & |\boldsymbol{A}| \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} & b \end{pmatrix}$$

其中 $\boldsymbol{A}^*$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，$\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵.

（1）计算并化简 $\boldsymbol{PQ}$.（2）证明：$\boldsymbol{Q}$ 可逆的充分必要条件是 $-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}\neq b$.

解　（1）由题意，及 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$ ，有

$$\boldsymbol{PQ}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{E} & 0 \\ -\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^* & |\boldsymbol{A}| \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} & b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{\alpha} \\ -\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}+|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} & -\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{\alpha}+b|\boldsymbol{A}| \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{\alpha} \\ 0^{\mathrm{T}} & |\boldsymbol{A}|(b-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}) \end{pmatrix}.$$

（2）由（1）有

$$|\boldsymbol{PQ}|=|\boldsymbol{P}||\boldsymbol{Q}|=\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{\alpha} \\ 0^{\mathrm{T}} & |\boldsymbol{A}|(b-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}) \end{vmatrix}=|\boldsymbol{A}|^2(b-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}),$$

再由 $\boldsymbol{A}$ 为可逆矩阵，及 $|\boldsymbol{P}|=|\boldsymbol{A}|\neq 0$ ，可得 $|\boldsymbol{Q}|=|\boldsymbol{A}|(b-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha})$，所以 $\boldsymbol{Q}$ 可逆的充分必要条件是 $|\boldsymbol{Q}|\neq 0$，即 $-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}\neq b$.

例 2.2.21　设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为 n 阶可逆矩阵，分块矩阵 $\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1} & \boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{B}^{-1} \\ \boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{B}^{-1} & \boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1} \end{pmatrix}$. 证明 $\boldsymbol{D}$ 可逆，并求 $\boldsymbol{D}^{-1}$.

证　由题意

$$|\boldsymbol{D}|=\begin{vmatrix} \boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1} & \boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{B}^{-1} \\ \boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{B}^{-1} & \boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1} & \boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{B}^{-1} \\ 2\boldsymbol{A}^{-1} & 2\boldsymbol{A}^{-1} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2\boldsymbol{B}^{-1} & \boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{B}^{-1} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E} \end{vmatrix}$$

$$=|2\boldsymbol{A}^{-1}||2\boldsymbol{B}^{-1}|\neq 0,$$

从而 $\boldsymbol{D}$ 可逆，设 $\boldsymbol{D}^{-1}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{X}_1 & \boldsymbol{X}_2 \\ \boldsymbol{X}_3 & \boldsymbol{X}_4 \end{pmatrix}$，则有

$$\boldsymbol{DD}^{-1}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1} & \boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{B}^{-1} \\ \boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{B}^{-1} & \boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{X}_1 & \boldsymbol{X}_2 \\ \boldsymbol{X}_3 & \boldsymbol{X}_4 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} (\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1})\boldsymbol{X}_1+(\boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{B}^{-1})\boldsymbol{X}_3 & (\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1})\boldsymbol{X}_2+(\boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{B}^{-1})\boldsymbol{X}_4 \\ (\boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{B}^{-1})\boldsymbol{X}_1+(\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1})\boldsymbol{X}_3 & (\boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{B}^{-1})\boldsymbol{X}_2+(\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1})\boldsymbol{X}_4 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \boldsymbol{E} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E} \end{pmatrix},$$

因此

$$(A^{-1}+B^{-1})X_1+(A^{-1}-B^{-1})X_3=E\,,\quad (A^{-1}+B^{-1})X_2+(A^{-1}-B^{-1})X_4=O\,,$$
$$(A^{-1}-B^{-1})X_1+(A^{-1}+B^{-1})X_3=O\,,\quad (A^{-1}-B^{-1})X_2+(A^{-1}+B^{-1})X_4=E\,,$$

解得

$$X_1=(A+B)/4\,,\quad X_2=(A-B)/4\,,\quad X_3=(A-B)/4\,,\quad X_4=(A+B)/4\,,$$

所以

$$D^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}(A+B) & (A-B)\\ (A-B) & (A+B)\end{pmatrix}.$$

2.2.5　题型五、矩阵方程的求解

求解矩阵方程的基本原则是“先化简，后计算”，以 X 是未知矩阵为例，一般先将已知中含有 X 的矩阵等式化简为 $AX=C$， $XB=C$， $AXB=C$ 等基本形式，若 A, B 可逆，可进一步化简为 $X=A^{-1}C$， $X=CB^{-1}$， $X=A^{-1}CB^{-1}$，然后再将 A，B，C 代入进行计算；若 A, B 不可逆，则应假设 X 的元素形式，进行矩阵乘法，按矩阵相等联立方程组来解.

例 2.2.22　【1998（3）】设矩阵 A, B 满足 $A^*BA=2BA-8E$，其中 $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$， E 为单位矩阵， A^* 为 A 伴随矩阵，则 $B=$________.

解　由题意 $|A|=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=-2\neq 0$，故 A 可逆，再由 $A^*BA=2BA-8E$，有

$$A(A^*BA)A^{-1}=A(2BA-8E)A^{-1}\,,$$

整理可得

$$|A|B=2AB-8E\,,$$

从而有

$$B=8(2A-|A|E)^{-1}\,,$$

其中

$$(2A-|A|E)=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & -4 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix},$$

因此

$$B=8\begin{pmatrix}4 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}^{-1}=8\begin{pmatrix}\frac{1}{4} & 0 & 0\\ 0 & -\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{4}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & -4 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}.$$

例 2.2.23　已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$，矩阵 $\boldsymbol{X}$ 满足 $\boldsymbol{XA}^*=3\boldsymbol{X}+\boldsymbol{A}^{-1}$，求矩阵 $\boldsymbol{X}$.

解　方程两边右乘 $\boldsymbol{A}$，得

$$(\boldsymbol{XA}^*)\boldsymbol{A}=\left(3\boldsymbol{X}+\boldsymbol{A}^{-1}\right)\boldsymbol{A}，$$

整理得

$$\boldsymbol{X}(\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A})=3\boldsymbol{XA}+\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}，$$

因此

$$\boldsymbol{X}|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}=3\boldsymbol{XA}+\boldsymbol{E}，\quad \boldsymbol{X}(|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}-3\boldsymbol{A})=\boldsymbol{E}，$$

故 $|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}-3\boldsymbol{A}$ 可逆，且

$$\boldsymbol{X}=(|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}-3\boldsymbol{A})^{-1}，$$

而

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&-1\end{vmatrix}=1\times2\times(-1)=-2，$$

所以

$$\boldsymbol{X}=(-2\boldsymbol{E}-3\boldsymbol{A})^{-1}=\left(\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&-2&0\\0&0&-2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3&0&0\\0&6&0\\0&0&-3\end{pmatrix}\right)^{-1}=\begin{pmatrix}-\dfrac{1}{5}&0&0\\0&-\dfrac{1}{8}&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

2.2.6　题型六、克莱姆法则的应用

克莱姆法则适用于方程数与未知数相等的线性方程组，该法则建立了方程组中系数、常数与方程组解之间的关系．在利用该法则时，需要注意非齐次线性方程组系数行列式为零，方程组存在无解和无穷多解两种情况．

例 2.2.24　设 a 为常数，讨论线性方程组 $\begin{cases}ax_1+x_2+x_3=1\\x_1+ax_2+x_3=a\\x_1+x_2+ax_3=a^2\end{cases}$ 解的情况．

解　由于方程组的系数矩阵的行列式

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}a&1&1\\1&a&1\\1&1&a\end{vmatrix}\xlongequal[r_1+r_3]{r_1+r_2}\begin{vmatrix}a+2&a+2&a+2\\1&a&1\\1&1&a\end{vmatrix}=(a+2)\begin{vmatrix}1&1&1\\1&a&1\\1&1&a\end{vmatrix}=(a+2)(a-1)^2，$$

从而当 $a\neq1$，$a\neq-2$ 时，$|\boldsymbol{A}|\neq0$，方程组有唯一解，否则方程组无解或有无穷多解．

当 $a=1$ 时，方程组化为

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=1 \\ x_1+x_2+x_3=1, \\ x_1+x_2+x_3=1 \end{cases}$$

即 $x_1+x_2+x_3=1$，故其有无穷多解，而当 $a=-2$ 时，方程组化为

$$\begin{cases} -2x_1+x_2+x_3=1 \\ x_1-2x_2+x_3=-2, \\ x_1+x_2-2x_3=4 \end{cases}$$

这需要 x_1,x_2,x_3 满足 $0x_1+0x_2+0x_3=3$，因此方程组无解.

例 2.2.25　【1996（3）】设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

其中 $a_i\neq a_j\ (i\neq j;\ i,j=1,2,\cdots,n)$，则线性方程组 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的解是__________.

解　由题意，由范德蒙德行列式有 $\left|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right|=\left|\boldsymbol{A}\right|=\prod\limits_{1\leqslant j<i\leqslant n}(a_i-a_j)\neq 0$. 从而方程组有唯一解，并且

$$x_j=\frac{D_j}{\left|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right|} \quad (j=1,2,\cdots,n),$$

其中 D_j 为将 $\left|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right|$ 的第 j 列用 $\boldsymbol{b}$ 替换后对应的行列式，因此有

$$D_1=\left|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right|, \qquad D_j=0 \quad (j=2,\cdots,n),$$

故线性方程组的解是 $\boldsymbol{x}=(1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$.

例 2.2.26　求二次多项式 $f(x)$，使其满足 $f(1)=2$，$f(2)=6$，$f(3)=12$.

解　设 $f(x)=a+bx+cx^2$，由题意，可得到以 a，b，c 为未知数的线性方程组

$$\begin{cases} a+b1+c1^2=2, \\ a+b2+c2^2=6, \\ a+b3+c3^2=12, \end{cases}$$

其系数矩阵的行列式

$$\left|\boldsymbol{A}\right|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1^2 \\ 1 & 2 & 2^2 \\ 1 & 3 & 3^2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1^2 & 2^2 & 3^2 \end{vmatrix}\xlongequal{\text{范德蒙德}}(3-2)(3-1)(2-1)=2\neq 0,$$

因此，方程组有唯一解. 又因为

$$|A_1|=\begin{vmatrix}2&1&1^2\\6&2&2^2\\12&3&3^2\end{vmatrix}=0,\quad |A_2|=\begin{vmatrix}1&2&1^2\\1&6&2^2\\1&12&3^2\end{vmatrix}=2,\quad |A_3|=\begin{vmatrix}1&1&2\\1&2&6\\1&3&12\end{vmatrix}=2,$$

从而方程组的解为

$$a=\frac{|A_1|}{|A|}=\frac{0}{2}=0,\quad b=\frac{|A_2|}{|A|}=\frac{2}{2}=1,\quad c=\frac{|A_3|}{|A|}=\frac{2}{2}=1,$$

故二次多项式为 $f(x)=x+x^2$.

2.3 深 化 训 练

2.3.1 填空题

（1）【2004（4）】设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$， $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$，其中 $\boldsymbol{P}$ 为 3 阶可逆矩阵，则 $\boldsymbol{B}^{2004}-2\boldsymbol{A}^2=$________.

（2）【2004（3）】设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，矩阵 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^*=2\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^*+\boldsymbol{E}$，其中 $\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵， $\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位矩阵，则 $|\boldsymbol{B}|=$________.

（3）设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为3阶方阵，并且 $|\boldsymbol{A}|=2$， $|\boldsymbol{B}|=-3$，则 $\left|-\left((\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}\right)^{-1}\right|=$________.

（4）【2005（3）】设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$, 为3维列向量，记矩阵

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3),\quad \boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+4\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2+9\boldsymbol{\alpha}_3),$$

如果 $|\boldsymbol{A}|=1$，则 $|\boldsymbol{B}|=$________.

（5）【1992（3）】设 $\boldsymbol{A}$ 为 m 阶方阵，$\boldsymbol{B}$ 为 n 阶方阵，且 $|\boldsymbol{A}|=a$， $|\boldsymbol{B}|=b$，令 $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}\end{pmatrix}$，则 $|\boldsymbol{C}|=$________.

（6）已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-3&2&-2\\2&x&3\\3&-1&1\end{pmatrix}$， $\boldsymbol{B}$ 为非零矩阵，且 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$，则 $x=$________.

2.3.2 单项选择题

（1）设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶可逆矩阵，且 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2=\boldsymbol{E}$，则 $(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}=$（　　）.

（A）$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{B}$；　（B）$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1}$；　（C）$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})$；　（D）$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{A}$.

（2）设 $\boldsymbol{A}$， $\boldsymbol{B}$ 为同阶方阵，且满足 $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^2=\boldsymbol{E}$，则下列选项一定正确的是（　　）.

（A）$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}$；　（B）$(\boldsymbol{B}\boldsymbol{A})^2=\boldsymbol{E}$；　（C）$\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$；　（D）$\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{B}$.

（3）【2008（3）】设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶非 $\boldsymbol{O}$ 矩阵， $\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵，若 $\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{O}$，则（　　）.

（A）$\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 不可逆，$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 不可逆；　（B）$\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 不可逆，$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 可逆；

（C）$\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 可逆，$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 可逆；　（D）$\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 可逆，$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 不可逆.

（4）【1998（2）】设 $\boldsymbol{A}$ 为任一 $n\,(n\geqslant 3)$ 阶方阵，$\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，$k(\neq 0,\pm 1)$ 为常数，则必有 $(k\boldsymbol{A})^*=$（　　）.

（A）$k\boldsymbol{A}^*$；　（B）$k^{n-1}\boldsymbol{A}^*$；　（C）$k^n\boldsymbol{A}^*$；　（D）$k^{-1}\boldsymbol{A}^*$.

（5）已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&3\\0&2&5\end{pmatrix}$，矩阵 $\boldsymbol{X}$ 满足 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{X}+2\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{X}$，其中 $\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，则 $|\boldsymbol{X}|=$（　　）.

（A）$\dfrac{3}{5}$；　（B）$\dfrac{2}{15}$；　（C）$\dfrac{1}{12}$；　（D）$-\dfrac{1}{12}$.

（6）【1993（4）】若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 均为 4×1 矩阵，且行列式 $|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1|=m$，$|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|=n$，则行列式 $|\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2|=$________.

（A）$m+n$；　（B）$-(m+n)$；　（C）$n-m$；　（D）$m-n$.

2.3.3　已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$，求与 $\boldsymbol{A}$ 可交换的一切矩阵.

2.3.4　已知 $\boldsymbol{\alpha}=(1,1,-1)$，$\boldsymbol{\beta}=(1,2,3)$，试求：$\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}$ 及 $(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta})^n$.

2.3.5　设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶方阵，且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$. 证明 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$.

2.3.6　设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶矩阵，满足 $3\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{B}-3\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$，证明：$3\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$ 可逆及 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 可交换.

2.3.7　已知3阶非零实矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，证明 $\boldsymbol{A}$ 是可逆矩阵.

2.3.8　【1993（1）】已知矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&1\\1&1&3\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 的逆矩阵.

2.3.9　已知 $\boldsymbol{A}$ 为3阶方阵，$|\boldsymbol{A}|=\dfrac{1}{2}$，求 $\left|(2\boldsymbol{A})^{-1}-5\boldsymbol{A}^*\right|$.

2.3.10　【2001（2）】已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$，且矩阵 $\boldsymbol{X}$ 满足

$$\boldsymbol{AXA}+\boldsymbol{BXB}=\boldsymbol{BXA}+\boldsymbol{AXB}+\boldsymbol{E},$$

其中 $\boldsymbol{E}$ 为3阶单位矩阵，求 $\boldsymbol{X}$.

2.3.11　【1992（4）】设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$，矩阵 $\boldsymbol{X}$ 满足 $\boldsymbol{AX}+\boldsymbol{E}=\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{X}$，其中 $\boldsymbol{E}$ 为三阶单位矩阵，求矩阵 $\boldsymbol{X}$.

2.3.12　【2000（1）】设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&-3&0&8\end{pmatrix}$，且 $\boldsymbol{ABA}^{-1}=\boldsymbol{BA}^{-1}+3\boldsymbol{E}$，其中 $\boldsymbol{E}$ 为 4 阶单位矩阵，求矩阵 $\boldsymbol{B}$.

2.3.13　设四阶矩阵 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\left[\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{A}\right)^*\right]^{-1}\boldsymbol{BA}^{-1}=2\boldsymbol{AB}+12\boldsymbol{E}$，其中 $\boldsymbol{E}$ 为 4 阶单位矩阵，而

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&0&0\\1&3&0&0\\0&0&0&2\\0&0&-1&0\end{pmatrix},$$

求矩阵 $\boldsymbol{B}$.

2.3.14　设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，若对任意的列向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 都有 $\boldsymbol{A\alpha}=0$，证明 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$.

2.3.15　设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$，$\boldsymbol{D}$ 都是 n 阶矩阵，其中 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$ 并且 $\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{CA}$，试证明

$$\begin{vmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{B}\\\boldsymbol{C}&\boldsymbol{D}\end{vmatrix}=|\boldsymbol{AD}-\boldsymbol{CB}|.$$

2.3.16　齐次线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_2+x_3+cx_4=0\\x_1+2x_2+x_3+x_4=0\\x_1+x_2-3x_3+x_4=0\\x_1+x_2+cx_3+dx_4=0\end{cases}$ 有非零解，试求 c，d 应满足的条件.

2.4　深化训练详解

2.3.1　填空题

（1）$\begin{pmatrix}3&0&0\\0&3&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$. **提示**　由于 $\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，从而

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B}^{2004}-2\boldsymbol{A}^2&=(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP})^{2004}-2\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^{2004}\boldsymbol{P}-2\boldsymbol{A}^2\\&=\boldsymbol{P}^{-1}\left(\boldsymbol{A}^2\right)^{1002}\boldsymbol{P}-2\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{A}^2\\&=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&3&0\\0&0&-1\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

（2）$\frac{1}{9}$. **提示**　依题 $|\boldsymbol{A}|=3$，再由 $\boldsymbol{ABA}^*=2\boldsymbol{BA}^*+\boldsymbol{E}$ 整理得

$$\boldsymbol{B}=\frac{1}{3}(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^{-1}\boldsymbol{A},$$

故

$$|\boldsymbol{B}|=\left|\frac{1}{3}(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^{-1}\boldsymbol{A}\right|=\left(\frac{1}{3}\right)^3|\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}|^{-1}|\boldsymbol{A}|=\frac{1}{9}.$$

（3）$\dfrac{1}{6}$．**提示**

$$\left|-\left((\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}\right)^{-1}\right|=(-1)^3\frac{1}{\left|(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}\right|}=-\frac{1}{|\boldsymbol{AB}|}=-\frac{1}{|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|}=-\frac{1}{2\times(-3)}=\frac{1}{6}.$$

（4）2．**提示**　由题意

$$|\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+4\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2+9\boldsymbol{\alpha}_3|$$

$$\xlongequal[c_2-c_1]{c_3-c_2}|\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2+5\boldsymbol{\alpha}_3|\xlongequal[c_3\div 2]{c_3-c_2}2|\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3|$$

$$\xlongequal[c_1-c_2-c_3]{c_2-3c_3}2|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|=2|\boldsymbol{A}|=2.$$

（5）ab．

（6）-3．**提示**由已知 $\boldsymbol{B}$ 必有某一列向量 $\boldsymbol{B}_i$ 满足 $\boldsymbol{B}_i\neq\boldsymbol{O}$，且 $\boldsymbol{AB}_i=\boldsymbol{0}$，从而齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非零解，由克莱姆法则有

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}-3&2&-2\\2&x&3\\3&-1&1\end{vmatrix}=0,$$

解得 $x=-3$．

2.3.2　单项选择题

（1）（C）．　（2）（C）．　（3）（C）．

提示　$\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{O}$，有 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{E}$，从而有

$$(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2)=\boldsymbol{E},\quad(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2)=\boldsymbol{E},$$

故 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 可逆，$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 可逆．

（4）（B）．　（5）（B）．

（6）（C）．**提示**　由题意

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2|&=|\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_1|+|\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_2|\\&=-|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1|+|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|=-m+n=n-m.\end{aligned}$$

2.3.3　设与 $\boldsymbol{A}$ 可交换的矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}a&b&c\\a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\end{pmatrix}$，则有

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\0&0&0\end{pmatrix},\quad\boldsymbol{BA}=\begin{pmatrix}0&a&b\\0&a_1&b_1\\0&a_2&b_2\end{pmatrix},$$

由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$，可得 $a_1=0, b_1=a, c_1=b, a_2=0, b_2=a_1, c_2=b_1, b_2=0,$ 从而

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix},$$

其中 a，b，c 为任意一实数.

2.3.4　依题

$$\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}}=(1,1,-1)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}=1+2-3=0，\quad \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix},$$

由于 $\boldsymbol{\beta\alpha}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}}=0$，因此

$$\left(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}\right)^n=(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta})\cdots(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\underbrace{(\boldsymbol{\beta\alpha}^{\mathrm{T}})\cdots(\boldsymbol{\beta\alpha}^{\mathrm{T}})}_{n-1}\boldsymbol{\beta}=0\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{O}.$$

2.3.5　由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$，整理得 $(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=\boldsymbol{E}$，故 $(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E})$ 与 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})$ 互为逆矩阵，从而有

$$(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E})=\boldsymbol{E},$$

所以 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$.

2.3.6　由 $3\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{B}-3\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$ 整理有

$$(3\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E})=\boldsymbol{E},$$

故 $3\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$ 可逆，其逆为 $\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E}$，进而有

$$(3\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E})=(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E})(3\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}),$$

化简得 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$，即 A，$\boldsymbol{B}$ 可交换.

2.3.7　设 $\boldsymbol{A}=\left(a_{ij}\right)_{3\times3}$，且 $a_{11}\neq0$，由 $\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 有 $a_{ij}=\boldsymbol{A}_{ij}\ (i,j=1,2,3)$，从而

$$|\boldsymbol{A}|=a_{11}\boldsymbol{A}_{11}+a_{12}\boldsymbol{A}_{12}+a_{13}\boldsymbol{A}_{13}=a_{11}^2+a_{12}^2+a_{13}^2\neq0,$$

因此 $\boldsymbol{A}$ 可逆.

2.3.8　由 $\boldsymbol{A}$ 可逆，有 $\boldsymbol{A}^*$ 可逆，且 $(\boldsymbol{A}^*)^{-1}=\dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}=\left|\boldsymbol{A}^{-1}\right|\boldsymbol{A}$，再由 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 可求得

$$\left|\boldsymbol{A}^{-1}\right|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}=2，\qquad \boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \frac{5}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

所以

$$(\boldsymbol{A}^*)^{-1}=2\begin{pmatrix} \frac{5}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.3.9　$\left|(2A)^{-1}-5A^*\right|=2\left|A\right|\left|(2A)^{-1}-5A^*\right|=2\left|\frac{1}{2}E-\frac{5}{2}E\right|=-2^4$.

2.3.10　由已知 $AXA+BXB=BXA+AXB+E$，整理得

$$(A-B)X(A-B)=E,$$

因为

$$|A-B|=\begin{vmatrix}1&-1&-1\\0&1&-1\\0&0&1\end{vmatrix}=1,$$

故 $A-B$ 可逆，求得 $(A-B)^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$，从而

$$X=\left[(A-B)^{-1}\right]^2=\begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&5\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

2.3.11　由 $AX+E=A^2+X$，整理有

$$(A-E)X=A^2-E=(A-E)(A+E),$$

其中 $A-E=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$ 为可逆矩阵，从而有

$$X=(A+E)=\begin{pmatrix}2&0&1\\0&3&0\\1&0&2\end{pmatrix}.$$

2.3.12　由题及 $AA^*=\left|A\right|E$，有 $\left|A\right|^3=\left|A^*\right|=8$，$\left|A\right|=2$，再由 $ABA^{-1}=BA^{-1}+3E$ 整理可得

$$\left|A\right|B=A^*B+3\left|A\right|E,$$

将 $\left|A\right|=2$ 代入，进一步整理有 $(2E-A^*)B=6E$，由于 $2E-A^*$ 可逆，且

$$(2E-A^*)^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{6}\end{pmatrix},$$

所以

$$B=6(2E-A^*)^{-1}=\begin{pmatrix}6&0&0&0\\0&6&0&0\\6&0&6&0\\0&3&0&-1\end{pmatrix}.$$

2.3.13　依题有$|A|=2$，从而可得

$$\left[\left(\frac{1}{2}A\right)^*\right]^{-1}=\frac{\frac{1}{2}A}{\left|\frac{1}{2}A\right|}=4A,$$

代入$\left[\left(\frac{1}{2}A\right)^*\right]^{-1}BA^{-1}=2AB+12E$，整理可得$B=6(2E-A)^{-1}$，其中

$$(2E-A)^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 0 & 0\\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{2}{6} & \frac{2}{6}\\ 0 & 0 & -\frac{1}{6} & \frac{2}{6}\end{pmatrix},$$

所以

$$B=\begin{pmatrix}2 & -4 & 0 & 0\\ -2 & -2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 2\\ 0 & 0 & -1 & 2\end{pmatrix}.$$

2.3.14　**证法 1**　取$\alpha=\varepsilon_i=(\underbrace{0,\cdots,0,\overset{i}{1},0,\cdots,0}_{n})^{\mathrm{T}}$，则有$A\varepsilon_i=0\quad(i=1,2,\cdots,n)$，从而

$$O=(0,0,\cdots,0)=(A\varepsilon_1,A\varepsilon_2,\cdots,A\varepsilon_n)=A(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)=AE=A,$$

命题得证.

证法 2　将A按列分块，并记$A=(A_1,A_2,\cdots,A_n)$，由

$$A(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)=(A\varepsilon_1,A\varepsilon_2,\cdots,A\varepsilon_n)=(A_1,A_2,\cdots,A_n)=(0,0,\cdots,0),$$

有$A_i=0$，$(i=1,2,\cdots,n)$，故$A=O$.

2.3.15　由于

$$\begin{pmatrix}E & O\\ -CA^{-1} & E\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A & B\\ O & -CA^{-1}B+D\end{pmatrix},$$

两端取行列式，可得

$$\begin{vmatrix}E & O\\ -CA^{-1} & E\end{vmatrix}\begin{vmatrix}A & B\\ C & D\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}A & B\\ O & -CA^{-1}B+D\end{vmatrix},$$

从而有

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}A & B\\ C & D\end{vmatrix}&=|A||-CA^{-1}B+D|=|-ACA^{-1}B+AD|\overset{AC\text{可交换}}{=\!=\!=\!=}|-CAA^{-1}B+AD|\\&=|AD-CB|.\end{aligned}$$

2.3.16　由克莱姆法则方程组的系数行列式为零，从而有

$$0=\begin{vmatrix}1&1&1&c\\1&2&1&1\\1&1&-3&1\\1&1&c&d\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&0&c-1\\1&1&0&0\\1&0&-4&0\\1&0&c-1&d-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&c-1\\1&-4&0\\1&c-1&d-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&c-1\\0&-4&1-c\\0&c+3&d-1\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}-4&1-c\\c+3&d-1\end{vmatrix}=(c+1)^2-4d,$$

故应满足的条件为 $(c+1)^2=4d$.

2.5　综合提高训练

例 2.5.1　【2009（3）】设 $\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{P}$ 均为3阶矩阵， $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}$ 为 $\boldsymbol{P}$ 的转置矩阵，且 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$，若 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$， $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，则 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AQ}$ 为（　　）.

（A）$\begin{pmatrix}2&1&0\\1&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$；　（B）$\begin{pmatrix}1&1&0\\1&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$；　（C）$\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$；　（D）$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$.

解　由题意有

$$\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},$$

从而

$$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}},$$

因此

$$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AQ}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AP}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&1&0\\0&0&2\end{pmatrix},$$

故选项（A）正确.

例 2.5.2　【2012（1，3）】设 $\boldsymbol{A}$ 为3阶矩阵， $\boldsymbol{P}$ 为3阶可逆矩阵，且 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$.若 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$， $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，则 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{AQ}$ 为（　　）.

（A）$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$；　（B）$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$；　（C）$\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$；　（D）$\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

解　由题意有

$$Q=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},$$

从而

$$\boldsymbol{Q}^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1},$$

因此

$$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{AQ}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix},$$

故选项（B）正确.

例 2.5.3　【2013（1，3）】设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 是3阶非零方阵，$|\boldsymbol{A}|$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的行列式，A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式，若 $a_{ij}+A_{ij}=0\ (i,j=1,2,3)$，则 $|\boldsymbol{A}|=$________.

解　由题意 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 为非零方阵，不妨设 $a_{11}\neq 0$，由 $a_{ij}=-A_{ij}\ (i,j=1,2,3)$，有

$$|\boldsymbol{A}|=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}=-a_{11}^2-a_{12}^2-a_{13}^2\neq 0,$$

及

$$\boldsymbol{A}^*=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&A_{31}\\A_{12}&A_{22}&A_{32}\\A_{13}&A_{23}&A_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-a_{11}&-a_{21}&-a_{31}\\-a_{12}&-a_{22}&-a_{32}\\-a_{13}&-a_{23}&-a_{33}\end{pmatrix}=-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}},$$

从而有

$$|\boldsymbol{AA}^*|=|-\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}}|=(-1)^3|\boldsymbol{A}|^2=-|\boldsymbol{A}|^2,$$

再由 $\boldsymbol{AA}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$，有 $|\boldsymbol{AA}^*|=|\boldsymbol{A}|^3$，故 $|\boldsymbol{A}|=-1$.

例 2.5.4　【2013（1，3）】设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&a\\1&0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&1\\1&b\end{pmatrix}$，问当 a,b 为何值时，存在矩阵 $\boldsymbol{C}$ 使得 $\boldsymbol{AC}-\boldsymbol{CA}=\boldsymbol{B}$，并求出所有矩阵 $\boldsymbol{C}$.

解　由题意，设 $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{pmatrix}$，代入 $\boldsymbol{AC}-\boldsymbol{CA}=\boldsymbol{B}$，整理有

$$\begin{pmatrix}-x_2+ax_3&-ax_1+x_2+ax_4\\x_1-x_3-x_4&x_2-ax_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\1&b\end{pmatrix},$$

从而有

$$\begin{cases}-x_2+ax_3=0\\-ax_1+x_2+ax_4=1\\x_1-x_3-x_4=1\\x_2-ax_3=b\end{cases},$$

经整理为

$$\begin{cases} x_1 = 1 + x_3 + x_4 \\ x_2 = -x_3 \end{cases},$$

令 $x_3 = c_1$，$x_4 = c_2$，则其全部解为

$$\begin{cases} x_1 = 1 + c_1 + c_2 \\ x_2 = -c_1 \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = c_2 \end{cases},$$

其中 c_1，c_2 为任意实数，因此

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 + c_1 + c_2 & -c_1 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix}.$$

例 2.5.5　【2015（3）】设矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & -1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$，且 $\boldsymbol{A}^3 = \boldsymbol{O}$.

（1）求 a 的值.

（2）若矩阵 $\boldsymbol{X}$ 满足 $\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}\boldsymbol{A}^2 - \boldsymbol{A}\boldsymbol{X} + \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{E}$，其中 $\boldsymbol{E}$ 为3阶单位矩阵，求 $\boldsymbol{X}$.

解　（1）因为 $\boldsymbol{A}^3 = \boldsymbol{O}$，有

$$0 = |\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & -1 \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 - a^2 & a & -1 \\ -a & 1 & a \end{vmatrix} = a^3,$$

解得 $a = 0$.

（2）由 $\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}\boldsymbol{A}^2 - \boldsymbol{A}\boldsymbol{X} + \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{E}$，整理有

$$\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}\boldsymbol{A}^2 - \boldsymbol{A}(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}\boldsymbol{A}^2) = \boldsymbol{E},$$

即

$$(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{X}(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}^2) = \boldsymbol{E},$$

从而

$$\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})^{-1}(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}^2)^{-1} = (\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}^2 - \boldsymbol{A})^{-1},$$

经计算

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

第 3 章　矩阵的初等变换与线性方程组

3.1　知 识 要 点

3.1.1　矩阵的初等变换与初等矩阵

对矩阵施以下列三种变换，称为矩阵的**初等变换**.

（1）**交换**：交换矩阵的某两行（列）对应位置元素.

（2）**数乘**：用一个非零数 k 乘矩阵的某一行（列）的所有元素.

（3）**倍加**：将某一行（列）所有元素的 l 倍加到另一行（列）的对应元素上.

若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经过有限次初等变换化为矩阵 $\boldsymbol{B}$，则称 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ **等价**，记作 $\boldsymbol{A}\to\boldsymbol{B}$. 任意一个矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 经过若干次初等变换后，可以化为形式为 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}_{m\times n}$ 的标准形.

对单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 实施一次初等变换得到的矩阵，称为**初等矩阵**. 分别记为 $\boldsymbol{E}(ij)$、$\boldsymbol{E}\big(i(k)\big)$、$\boldsymbol{E}\big(ij(k)\big)$，其中 $\boldsymbol{E}(ij)$ 表示将单位矩阵中的第 i,j 两行（或列）对换得到的初等矩阵；$\boldsymbol{E}\big(i(k)\big)$ 表示将单位矩阵中的第 i 行（或列）乘以数 k（$k\neq 0$）得到的初等矩阵；$\boldsymbol{E}\big(ij(k)\big)$ 表示将单位矩阵中的第 j 行乘以数 k（$k\neq 0$）加到 i 行或将单位矩阵中的第 i 列乘以数 k 加到 j 列得到的初等矩阵.

初等矩阵的性质如下：

（1）初等矩阵均可逆，则其逆矩阵还是初等矩阵. 且

$$\boldsymbol{E}^{-1}(ij)=\boldsymbol{E}(ij)，\quad \boldsymbol{E}^{-1}\big(i\,(k)\big)=\boldsymbol{E}\left(i\left(\frac{1}{k}\right)\right)，\quad \boldsymbol{E}^{-1}\big(ij(l)\big)=\boldsymbol{E}\big(ij(-l)\big).$$

（2）设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，对 $\boldsymbol{A}$ 施以某种初等行变换，等价于在 $\boldsymbol{A}$ 左侧乘以相应的 m 阶初等矩阵；对 $\boldsymbol{A}$ 施以某种初等列变换，等价于在 $\boldsymbol{A}$ 右侧乘以相应的 n 阶初等矩阵.

（3）$\boldsymbol{A}$ 可逆 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\cdots\boldsymbol{P}_s$，其中 $\boldsymbol{P}_i$ $(i=1,2,\cdots s)$ 为初等矩阵.

3.1.2　矩阵的秩

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，在 $\boldsymbol{A}$ 中任取 k 行、k 列（$k\leqslant\min(m,n)$），位于这些行、列交叉点的 k^2 个元素保持相对位置不变组成一个 k 阶行列式，称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的一个 k **阶子式**.

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中最高不为零的子式的阶数 r 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**秩**，记为秩$(\boldsymbol{A})=r$ 或 $R(\boldsymbol{A})=r$.当 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$ 时，规定 $R(\boldsymbol{A})=0$. 若 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $R(\boldsymbol{A})=n$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为**满秩**矩阵；若 $R(\boldsymbol{A}_{m\times n})=m$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为**行满秩**矩阵；若 $R(\boldsymbol{A}_{m\times n})=n$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为**列满秩**矩阵.

矩阵秩的常用结论：

（1）若 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 阶矩阵，则 $0\leqslant R(\boldsymbol{A})\leqslant\min\{m,n\}$；

（2） $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})=R(-\boldsymbol{A})$；

（3）初等变换不改变矩阵的秩，即若 $\boldsymbol{A}\to\boldsymbol{B}$，则有 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})$；

（4）设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$， $\boldsymbol{A}$ 为非奇异阵 $\Leftrightarrow$ $|\boldsymbol{A}|\neq 0 \Leftrightarrow R(\boldsymbol{A})=n \Leftrightarrow$ $\boldsymbol{A}$ 满秩 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{A}\to\boldsymbol{E}$；

（5）若 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 阶矩阵， $\boldsymbol{P}$ 为 m 阶可逆矩阵， $\boldsymbol{Q}$ 为 n 阶可逆矩阵，则

$$R(\boldsymbol{PA})=R(\boldsymbol{AQ})=R(\boldsymbol{PAQ})=R(\boldsymbol{A});$$

（6） $\max\{R(\boldsymbol{A}),R(\boldsymbol{B})\}\leqslant R(\boldsymbol{A}\ \ \boldsymbol{B})\leqslant R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B})$；

（7） $R(\boldsymbol{AB})\leqslant \min\{R(\boldsymbol{A}),R(\boldsymbol{B})\}$；

（8）设 $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{B}_{n\times k}=\boldsymbol{O}_{m\times k}$，则 $R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B})\leqslant n$；

（9）设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，则 $R(\boldsymbol{A}^*)=\begin{cases} n, & R(\boldsymbol{A})=n \\ 1, & R(\boldsymbol{A})=n-1 \\ 0, & R(\boldsymbol{A})<n-1 \end{cases}$.

3.1.3　用初等变换求逆矩阵及解矩阵方程

（1）用初等变换求逆矩阵.

方法 1：用初等行变换.

$$(\boldsymbol{A}\ \vdots\ \boldsymbol{E})\xrightarrow{\text{初等行变换}}(\boldsymbol{E}\ \vdots\ \boldsymbol{A}^{-1}).$$

方法 2：用初等列变换.

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{E}\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}\\ \boldsymbol{A}^{-1}\end{pmatrix}.$$

（2）解矩阵方程.

设 $\boldsymbol{A}$ 为可逆的 n 阶方阵，且满足矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$，则 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$，即有

$$(\boldsymbol{A}\ \vdots\ \boldsymbol{B})\xrightarrow{\text{初等行变换}}(\boldsymbol{E}\ \vdots\ \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}).$$

设 $\boldsymbol{A}$ 为可逆的 n 阶方阵，且满足矩阵方程 $\boldsymbol{XA}=\boldsymbol{B}$，则 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{BA}^{-1}$，即有

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B}\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}\\ \boldsymbol{BA}^{-1}\end{pmatrix}.$$

3.1.4　线性方程组解的判定定理

设非齐次线性方程组为 $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$，对应的齐次线性方程组为 $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{x}=0$，则：

（1） $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{b})=n \Leftrightarrow \boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解；

（2） $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{b})<n \Leftrightarrow \boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解；

（3） $R(\boldsymbol{A})\neq R(\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{b}) \Leftrightarrow \boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 无解；

（4） $R(\boldsymbol{A})=n \Leftrightarrow \boldsymbol{Ax}=0$ 只有零解；

（5） $R(\boldsymbol{A})<n \Leftrightarrow \boldsymbol{Ax}=0$ 有非零解.

3.2　典型例题分析

3.2.1　题型一、矩阵的初等变换问题

例 3.2.1　用初等变换将 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&3&1&2\\-1&3&0&-1&1\\0&1&7&2&9\\2&1&1&3&0\end{pmatrix}$ 化为标准型.

解　利用矩阵的初等行变换，有

$$\boldsymbol{A}\to\begin{pmatrix}1&0&3&1&2\\0&3&3&0&3\\0&1&7&2&9\\0&1&-5&1&-4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&3&1&2\\0&1&1&0&1\\0&1&7&2&9\\0&1&-5&1&-4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&3&1&2\\0&1&1&0&1\\0&0&6&2&8\\0&0&-6&1&-5\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&3&1&2\\0&1&1&0&1\\0&0&6&2&8\\0&0&0&3&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&1&0&1\\0&0&6&2&8\\0&0&0&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\end{pmatrix}.$$

例 3.2.2　设 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{PAQ}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$，试求矩阵 $\boldsymbol{A}$.

解　依题有

$$\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{Q}^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix},$$

从而

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}^{-1}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}\boldsymbol{Q}^{-1}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix},$$

由初等矩阵的性质可知，先将矩阵 $\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$ 的第一行与第二行、第三行依次交换，再将第一列减去第三列即可得到矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{21}-a_{23}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}-a_{33}&a_{32}&a_{33}\\a_{11}-a_{13}&a_{12}&a_{13}\end{pmatrix}.$$

3.2.2　题型二、矩阵的秩的求解

例 3.2.3　设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&2&1&0\\2&-2&4&-2&0\\3&0&6&-1&1\\0&3&0&0&1\end{pmatrix}$，求 $R(\boldsymbol{A})$，并求 $\boldsymbol{A}$ 的一个最高阶非零子式.

解　利用矩阵的初等行变换，有

$$\boldsymbol{A}\to\begin{pmatrix}1&-1&2&1&0\\0&0&0&-4&0\\0&3&0&-4&1\\0&3&0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&2&1&0\\0&3&0&0&1\\0&3&0&-4&1\\0&0&0&-4&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&2&1&0\\0&3&0&0&1\\0&0&0&-4&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix},$$

故 $R(\boldsymbol{A})=3$；且 $\boldsymbol{A}$ 的一个最高阶非零子式为 $\begin{vmatrix}-2&4&-2\\0&6&-1\\3&0&0\end{vmatrix}$.

例 3.2.4　设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 为 $n\times m$ 矩阵．则下列结论正确的是（　　）.

（A）当 $m>n$ 时，$|\boldsymbol{AB}|=0$；　　（B）当 $m>n$ 时，$|\boldsymbol{AB}|\neq 0$；

（C）当 $m<n$ 时，$|\boldsymbol{AB}|=0$；　　（D）当 $m<n$ 时，$|\boldsymbol{AB}|\neq 0$.

解　当 $m>n$ 时，$R(\boldsymbol{AB})\leqslant R(\boldsymbol{B})<m$，而 $\boldsymbol{AB}$ 是一个 $m\times m$ 的矩阵，故 $|\boldsymbol{AB}|=0$，因此（A）正确.

例 3.2.5　设 $\boldsymbol{A}$ 为 4×3 矩阵，且 $R(\boldsymbol{A})=2$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&2&-3\\0&-5&0\\-1&0&4\end{pmatrix}$，则 $R(\boldsymbol{AB})=$________.

解　由于 $|\boldsymbol{B}|\neq 0$，因此 $\boldsymbol{B}$ 可逆，故 $R(\boldsymbol{AB})=R(\boldsymbol{A})=2$.

例 3.2.6　设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a&b&-3\\2&0&2\\3&2&-1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}b-1&a&1\\-1&1&0\\0&2&1\end{pmatrix}$，已知 $R(\boldsymbol{AB})<\min R\{(\boldsymbol{A}),R(\boldsymbol{B})\}$，求 a,b 的值，以及 $R(\boldsymbol{AB})$.

解　由 $R(\boldsymbol{AB})<R(\boldsymbol{A})$，有 $|\boldsymbol{A}|=0$，$|\boldsymbol{B}|=0$，即有

$$a+b=3，\ -a+2b=3，$$

解得 $a=1$，$b=2$．此时 $\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}-1&-3&-2\\2&6&4\\1&3&2\end{pmatrix}$，因此 $R(\boldsymbol{AB})=1$.

例 3.2.7　设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，证明 $R(\boldsymbol{A})=1\Leftrightarrow \boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}(b_1,b_2,\cdots,b_n)$，其中 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 及 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 均不全为零.

证　$\Rightarrow$ 由 $R(\boldsymbol{A})=1$，因此存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$、$\boldsymbol{Q}$ 使得 $\boldsymbol{PAQ}=\begin{pmatrix}1 & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$，从而有

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}^{-1}\begin{pmatrix}1 & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}\boldsymbol{Q}^{-1},$$

设 $\boldsymbol{P}^{-1}$ 的第一列元素为 $a_1,a_2,\cdots,a_n$，$\boldsymbol{Q}^{-1}$ 的第一行元素为 $b_1,b_2,\cdots,b_n$，且 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 及 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 均不全为零，则有

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}^{-1}\begin{pmatrix}1\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}(1,0,\cdots,0)\boldsymbol{Q}^{-1}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\ \vdots\\a_n\end{pmatrix}(b_1,b_2,\cdots,b_n).$$

$\Leftarrow$ 由 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\ \vdots\\a_n\end{pmatrix}(b_1,b_2,\cdots,b_n)$，有 $R(\boldsymbol{A})\leqslant R\big((b_1,b_2,\cdots,b_n)\big)=1$，再由 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 及 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 均不全为零，因此 $\boldsymbol{A}$ 为非零矩阵，故 $R(\boldsymbol{A})=1$.

例 3.2.8　若 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}$，证明 $R(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})+R(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=n$.

证　因为 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}$，所以 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})=\boldsymbol{O}$，则有

$$R(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})+R(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\leqslant n.$$

另一方面，由于 $(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})+(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=2\boldsymbol{E}$，从而

$$R(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})+R(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\geqslant R(2\boldsymbol{E})=n,$$

所以

$$R(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})+R(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=n.$$

3.2.3　题型三、利用初等变换求矩阵的逆矩阵

例 3.2.9　设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 4 & 3\\ 2 & 5 & 4\\ 1 & -3 & -2\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

解　由于

$$(\boldsymbol{A}\,\vdots\,\boldsymbol{E})=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 5 & 4 & 0 & 1 & 0\\ 1 & -3 & -2 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-2r_1}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -3 & -2 & -2 & 1 & 0\\ 0 & -7 & -5 & -1 & 0 & 1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3-2r_2}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -3 & -2 & -2 & 1 & 0\\ 0 & -1 & -1 & 3 & -2 & 1\end{array}\right)\xrightarrow[r_2\times(-1)]{r_3\leftrightarrow r_2}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & -3 & 2 & -1\\ 0 & -3 & -2 & -2 & 1 & 0\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3+3r_2}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&4&3&1&0&0\\0&1&1&-3&2&-1\\0&0&1&-11&7&3\end{array}\right)\xrightarrow[r_1-3r_3]{r_2-r_3}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&4&0&34&-21&9\\0&1&0&8&-5&2\\0&0&1&-11&7&-3\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_1-4r_2}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&2&-1&1\\0&1&0&8&-5&2\\0&0&1&-11&7&-3\end{array}\right),$$

所以 $\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}2&-1&1\\8&-5&2\\-11&7&-3\end{pmatrix}$.

3.2.4　题型四、线性方程组的求解

例 3.2.10　解非齐次线性方程组 $\begin{cases}x_1-2x_2+x_3-x_4=1\\-x_1+2x_2-x_3+2x_4=0\\2x_1+x_2-x_4=-1\end{cases}$.

解　对增广矩阵做初等变换，有

$$(\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{b})=\begin{pmatrix}1&-2&1&-1&1\\-1&2&-1&2&0\\2&1&0&-1&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2&1&0&2\\0&5&-2&0&-4\\0&0&0&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1/2&0&0&0\\0&-5/2&1&0&2\\0&0&0&1&1\end{pmatrix},$$

从而 $R(\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{b})=R(\boldsymbol{A})=3<4$，故方程组有无穷多解．上述矩阵对应的方程组为

$$\begin{cases}x_1=\quad-\dfrac{1}{2}x_2\\x_3=2+\dfrac{5}{2}x_2\\x_4=1\end{cases}.$$

因此方程组的全部解为

$$\begin{cases}x_1=-\dfrac{1}{2}c\\x_2=c\\x_3=2+\dfrac{5}{2}c\\x_4=1\end{cases}\quad（c\ \text{为任意常数}）.$$

例 3.2.11　解齐次线性方程组 $\begin{cases}2x_1+4x_2-x_3+x_4=0\\x_1-3x_2+2x_3+3x_4=0\\3x_1+x_2+x_3+4x_4=0\end{cases}$.

解　对系数矩阵做初等变换：

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&4&-1&1\\1&-3&2&3\\3&1&1&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-3&2&3\\0&-2&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0&1\\0&-2&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

由于 $R(\boldsymbol{A})=2<4$ ，因此方程组有无穷多解．上述矩阵对应的方程组为

$$\begin{cases} x_1=-x_2-x_4 \\ x_3=2x_2-x_4 \end{cases},$$

因此方程组的全部解为

$$\begin{cases} x_1=-c_1-c_2 \\ x_2=c_1 \\ x_3=2c_1-c_2 \\ x_4=c_2 \end{cases} \quad （c_1,c_2 \text{ 为任意实数}）.$$

例 3.2.12　当 λ 取何值时，方程组 $\begin{cases} 4x+3y+z=\lambda x \\ 3x-4y+7z=\lambda y \\ x+7y-6z=\lambda z \end{cases}$ 有非零解？

解　原方程组等价于

$$\begin{cases} (4-\lambda)x+3y+z=0 \\ 3x-(4+\lambda)y+7z=0 \\ x+7y-(6+\lambda)z=0 \end{cases}.$$

上述齐次线性方程组有非零解的充分必要条件是它的系数行列式

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 3 & 1 \\ 3 & -4-\lambda & 7 \\ 1 & 7 & -6-\lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda^2+6\lambda-75)=0,$$

从而当 $\lambda=0$ 或 $\lambda=-3\pm2\sqrt{21}$ 时，方程组有非零解．

例 3.2.13　设有非齐次线性方程组 $\begin{cases} -x_1-2x_2+ax_3=1 \\ x_1+x_2+2x_3=b \\ 4x_1+5x_2+10x_3=2 \end{cases}$，讨论该方程组的解的情况．

解　利用初等行变换，有

$$(\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{b})=\begin{pmatrix} -1 & -2 & a & 1 \\ 1 & 1 & 2 & b \\ 4 & 5 & 10 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & -2 & a & 1 \\ 0 & -1 & a+2 & b+1 \\ 0 & 0 & a+4 & 3-3b \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -a & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -4b+2 \\ 0 & 0 & a+4 & 3-3b \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3b+2 \\ 0 & 1 & 2 & -4b+2 \\ 0 & 0 & a+4 & 3-3b \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5b-2 \\ 0 & 1 & 2 & -4b+2 \\ 0 & 0 & a+4 & 3-3b \end{pmatrix},$$

从而，当 $a\neq-4$ 时，$R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{b})=3$，方程组有唯一解

$$\begin{cases} x_1=5b-2 \\ x_2=-4b+2-\dfrac{6-6b}{a+4} \\ x_3=\dfrac{3-3b}{a+4} \end{cases}.$$

当 $a=-4$ ，$b\neq 1$ 时，$R(\boldsymbol{A})=2<R(\boldsymbol{A}\ \ \boldsymbol{b})=3$，方程组无解；

当 $a=-4$ ，$b=1$ 时，$R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A}\ \ \boldsymbol{b})=2<3$，方程组有无穷多解． 此时

$$(\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{b})\to\begin{pmatrix}1&0&0&3\\0&1&2&-2\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

方程组的解为

$$\begin{cases}x_1=3\\x_2=-2-2c\\x_3=c\end{cases}\quad（c\text{ 为任意实数}）.$$

例 3.2.14　设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\5&6&7&8\end{pmatrix}$，求一个 4×2 的矩阵 $\boldsymbol{B}$ ，使得 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$ ，且 $R(\boldsymbol{B})=2$.

解　利用初等行变换，有

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\5&6&7&8\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&-4&-8&-12\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1&-2\\0&1&2&3\end{pmatrix},$$

设 $\boldsymbol{B}$ 的一个列向量为 $(x_1,x_2,x_3,x_4)^{\mathrm{T}}$ ，则有

$$\begin{cases}x_1-x_3-2x_4=0\\x_2+2x_3+3x_4=0\end{cases},$$

解得基础解系为 $\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}$， $\begin{pmatrix}2\\-3\\0\\1\end{pmatrix}$，故 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&2\\-2&-3\\1&0\\0&1\end{pmatrix}$满足条件.

3.3　深 化 训 练

3.3.1　填空题

（1）【2007（2，3）】设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}^3$ 的秩为________.

（2）设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价，考虑命题：

①行列式 $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|$；② $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$ ；③矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 必有同阶不为零的子式；④若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 不可逆，则矩阵 $\boldsymbol{B}$ 一定不可逆．其中正确的个数为________.

（3）$\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}^{2015}\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}^{2016}=$________.

（4）设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0&t\\1&2&2\\1&1&0\end{pmatrix}$，已知 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$，且 $R(\boldsymbol{X})=2$，则 $t=$________.

（5）设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵，且 $n<m$，则 $\left|\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right|=$________.

（6）已知方程组 $\begin{pmatrix}1&2&1\\2&3&a+2\\1&a&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}$ 无解，则 $a=$________.

（7）设有齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 和 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，其中 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 为 $m\times n$ 矩阵．考虑以下命题：

① 若 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解都是 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解，则 $R(\boldsymbol{A})\geqslant R(\boldsymbol{B})$；

② 若 $R(\boldsymbol{A})\geqslant R(\boldsymbol{B})$，则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解都是 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解；

③ 若 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 同解，则 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})$；

④ 若 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})$，则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 同解．

其中正确的个数是 ________.

（8）设线性方程组 $\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=4\\5x_2+6x_3=7\\k(k-2)x_3=(k-1)(k-2)\end{cases}$，当________时，线性方程组有唯一解；当________时，线性方程组无解；当________时，线性方程组有无穷多解．

3.3.2　单项选择题

（1）【2004（3）】设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价，则必有（　　）.

（A）当 $|\boldsymbol{A}|=a(a\neq 0)$ 时，$|\boldsymbol{B}|=a$；　　（B）当 $|\boldsymbol{A}|=a(a\neq 0)$ 时，$|\boldsymbol{B}|=-a$；

（C）当 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$ 时，$|\boldsymbol{B}|=0$；　　（D）当 $|\boldsymbol{A}|=0$ 时，$|\boldsymbol{B}|=0$．

（2）设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\\a_{41}&a_{42}&a_{43}&a_{44}\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}a_{14}&a_{13}&a_{12}&a_{11}\\a_{24}&a_{23}&a_{22}&a_{21}\\a_{34}&a_{33}&a_{32}&a_{31}\\a_{44}&a_{43}&a_{42}&a_{41}\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$，其中 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 $\boldsymbol{B}^{-1}=$（　　）.

（A）$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2$；　（B）$\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{P}_2$；　（C）$\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{A}^{-1}$；　（D）$\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{P}_1$．

（3）设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 阶矩阵，则其秩 $R(\boldsymbol{A})=r$ 的充分必要条件是（　　）.

（A）$\boldsymbol{A}$ 中有 r 阶子式不等于零；　　（B）$\boldsymbol{A}$ 中所有 $r+1$ 阶子式全都等于零；

（C）$\boldsymbol{A}$ 中非零子式的最高阶数小于 $r+1$；　（D）$\boldsymbol{A}$ 中非零子式的最高阶数等于 r．

（4）设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&k&k&k\\k&1&k&k\\k&k&1&k\\k&k&k&1\end{pmatrix}$，若 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 的秩为1，则 $k=$（　　）.

（A）-1；　（B）1；　（C）$\frac{1}{3}$；　（D）$-\frac{1}{3}$.

（5）已知 $\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&t\\3&6&9\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{P}$ 为 3 阶非零矩阵，且满足 $\boldsymbol{PQ}=\boldsymbol{O}$，则下列选项正确的是（　　）.

（A）$t\neq 6$ 时，$\boldsymbol{P}$ 的秩为 2；　（B）$t\neq 6$ 时，$\boldsymbol{P}$ 的秩为 1；

（C）$t=6$ 时，$\boldsymbol{P}$ 的秩为 2；　（D）$t=6$ 时，$\boldsymbol{P}$ 的秩为 1.

（6）设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 阶矩阵，齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 仅有零解的充分必要条件是系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $R(\boldsymbol{A})$ 满足（　　）.

（A）小于 m；　（B）小于 n；　（C）等于 m；　（D）等于 n.

（7）设齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=0$ 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的导出组，如果 $\boldsymbol{Ax}=0$ 只有零解，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$（　　）.

（A）必要无穷多解；　（B）必要唯一解；

（C）必定无解；　（D）选项 A、B、C 都不对.

（8）设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 阶矩阵，方程组 $\boldsymbol{Ax}=0$ 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的导出组，如果 $m<n$，则下列结论成立的是（　　）.

（A）$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 必要无穷多解；　（B）$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 必要唯一解；

（C）$\boldsymbol{Ax}=0$ 必非零解；　（D）$\boldsymbol{Ax}=0$ 只有零解.

（9）设 n 元齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=0$ 的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 r，则 $\boldsymbol{Ax}=0$ 有非零解的充分必要条件为（　　）.

（A）$r=n$；　（B）$r<n$；　（C）$r\geqslant n$；　（D）$r>n$.

（10）设 A 为 $m\times n$ 矩阵，$R(\boldsymbol{A})=r$，对于方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$，下列结论成立的是（　　）.

（A）当 $r=m$ 时，$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有解；　（B）当 $r=n$ 时，$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有解；

（C）当 $m=n$ 时，$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解；　（D）当 $r<n$ 时，$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解.

（11）若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵，且 $|\boldsymbol{A}|=0$，则线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$（　　）.

（A）有无穷多解；　（B）有唯一解；

（C）无解；　（D）可能无解，也可能有无穷多解.

（12）设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵，则以下选项错误的结论是（　　）.

（A）当 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 无解时，$|\boldsymbol{A}|=0$；　（B）当 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解时，$|\boldsymbol{A}|=0$；

（C）当 $|\boldsymbol{A}|=0$ 时，$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 无解；　（D）当 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解时，$|\boldsymbol{A}|\neq 0$.

（13）设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 阶矩阵，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $R(\boldsymbol{A})=m<n$，下列论断中错误的是（　　）.

（A）$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 只有零解；　（B）$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 必有非零解；

（C）$\forall \boldsymbol{b}\in\boldsymbol{R}^n,\ \boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 总有无穷多解；　（D）$\forall \boldsymbol{b}\in\boldsymbol{R}^n,\ \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 总有唯一解.

（14）设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 阶矩阵，$\boldsymbol{B}$ 为 $n\times m$ 阶矩阵，则下列选项正确的是（　　）.

（A）当 $n>m$ 时，方程组 $\boldsymbol{ABx}=\boldsymbol{0}$ 仅有零解；

（B）当 $m>n$ 时，方程组 $\boldsymbol{ABx}=\boldsymbol{0}$ 仅有零解；

（C）当 $n>m$ 时，方程组 $\boldsymbol{ABx}=\boldsymbol{0}$ 必有非零解；

（D）当 $m>n$ 时，方程组 $\boldsymbol{ABx}=\boldsymbol{0}$ 必有非零解.

（15）设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实矩阵，则对于线性方程组Ⅰ： $\boldsymbol{Ax}=0$；Ⅱ： $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}=0$，正确的结论为（　　）.

（A）Ⅰ与Ⅱ同解；

（B）Ⅰ的解是Ⅱ的解，但Ⅱ的解不是Ⅰ的解；

（C）Ⅰ的解不是Ⅱ的解，但Ⅱ的解是Ⅰ的解；

（D）Ⅰ的解不是Ⅱ的解，Ⅱ的解也不是Ⅰ的解.

3.3.3　用初等变换将 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&3&1&5\\2&4&0&-1&-3\\-1&-2&3&2&8\\1&2&-9&-5&-21\end{pmatrix}$ 化为标准型.

3.3.4　若 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价，且 $|\boldsymbol{A}|=0$，试证明 $|\boldsymbol{B}|=0$.

3.3.5　设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&2&3\\1&-1&0\\-1&2&1\end{pmatrix}$，用初等变化法求 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

3.3.6　设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&-2&4&5\\1&10&1&2\end{pmatrix}$，求 $R(\boldsymbol{A})$，并求 $\boldsymbol{A}$ 的一个最高阶非零子式.

3.3.7　设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&1&-3\\3&-2&\lambda&-16\\2&-3&0&1\\3&\mu&1&-2\end{pmatrix}$，其中 λ、μ 为参数，求 $\boldsymbol{A}$ 的秩的最大值和最小值.

3.3.8　设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&3&4\\3&k&2\\2&6&3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&5&6\end{pmatrix}$，若 $R(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{AB})=2$，求 k.

3.3.9　求 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&a&a&\cdots&a\\a&1&a&\cdots&a\\a&a&1&\cdots&a\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\a&a&a&\cdots&1\end{pmatrix}$ 的秩.

3.3.10　证明：秩为 r 的矩阵可以表示为 r 个秩为1的矩阵的和.

3.3.11　证明：设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，则 $R(\boldsymbol{A}^*)=\begin{cases}n, & R(\boldsymbol{A})=n\\1, & R(\boldsymbol{A})=n-1\\0, & R(\boldsymbol{A})<n-1\end{cases}$.

3.3.12　设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵，证明：方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{E}_m$ 有解的充分必要条件为 $R(\boldsymbol{A})=m$.

3.3.13　解方程组 $\begin{cases}x_1-2x_2+x_3+x_4=1\\x_1-2x_2+x_3-x_4=-1\\x_1-2x_2+x_3+5x_4=5\end{cases}$.

3.3.14　解方程组$\begin{cases} x_1+x_2+2x_3+2x_4+7x_5=0 \\ 2x_1+3x_2+4x_3+5x_4=0 \\ 3x_1+5x_2+6x_3+8x_4=0 \end{cases}$.

3.3.15　讨论方程组$\begin{cases} x_1+x_3-x_4=-3 \\ 2x_1-x_2+4x_3-3x_4=-4 \\ 3x_1+x_2+\lambda x_3=1 \\ 7x_1+7x_3-3x_4=3 \end{cases}$中的未知参数$\lambda$回答解的情况，并求解.

3.3.16　当a与b为何值时，方程组$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=0 \\ x_2+2x_3+2x_4=1 \\ -x_2+(a-3)x_3-2x_4=b \\ 3x_1+2x_2+x_3+ax_4=-1 \end{cases}$有唯一解？无解？有无穷多解？当有无穷多解时，求出全部解.

3.4　深化训练详解

3.3.1　填空题

（1）1．**提示**　由于$\boldsymbol{A}^3=\begin{pmatrix} 0&0&0&1 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}$，因此$\boldsymbol{A}^3$的秩为$1$.

（2）2．**提示**　③、④正确.

（3）$\begin{pmatrix} 7&8&9 \\ 4&5&6 \\ 1&2&3 \end{pmatrix}$．**提示**　由于$\begin{pmatrix} 1&2&3 \\ 4&5&6 \\ 7&8&9 \end{pmatrix}$的左右两侧的矩阵均为初等矩阵，因此$\begin{pmatrix} 0&0&1 \\ 0&1&0 \\ 1&0&0 \end{pmatrix}^{2015}\begin{pmatrix} 1&2&3 \\ 4&5&6 \\ 7&8&9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1&0&0 \\ 0&0&1 \\ 0&1&0 \end{pmatrix}^{2016}$相当于对$\begin{pmatrix} 1&2&3 \\ 4&5&6 \\ 7&8&9 \end{pmatrix}$实施初等变化.

（4）-2．**提示**　由于$|\boldsymbol{A}|\neq 0$，故$\boldsymbol{A}^*$、$\boldsymbol{A}$均可逆，因此$R(\boldsymbol{B})=R(\boldsymbol{X})=2$，故$\left|\boldsymbol{B}\right|=0$，即$t=-2$.

（5）0．**提示**　由于$R(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T)\leqslant R(\boldsymbol{A})\leqslant \min\{m,n\}<n$，而$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$为$m\times m$矩阵，故$\left|\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right|=0$.

（6）$a=-1$．**提示**　由于

$$(\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{b})=\begin{pmatrix} 1&2&1&1 \\ 2&3&a+2&3 \\ 1&a&-2&0 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1&2&1&1 \\ 0&-1&a&1 \\ 0&0&(a-3)(a+1)&a-3 \end{pmatrix},$$

显然，当$a=3$时，方程组有无穷多解；$a=-1$时，方程组无解.

（7）2 个．**提示**：①、③正确.

（8）$k\neq 0$且$k\neq 2$；$k=0$；$k=2$.

3.3.2　单项选择题

（1）（D）．**提示**　$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价，则存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$、$\boldsymbol{Q}$，使得 $\boldsymbol{PAQ}=\boldsymbol{B}$，故 $|\boldsymbol{PAQ}|=|\boldsymbol{B}|$，因此选项（D）正确.

（2）（C）．**提示**　由于 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AP}_2\boldsymbol{P}_1$，故 $\boldsymbol{B}^{-1}=\left(\boldsymbol{AP}_2\boldsymbol{P}_1\right)^{-1}=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{A}^{-1}$.

（3）（D）.

（4）（D）．**提示**　$\boldsymbol{A}^*$ 的秩为 1，因此 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 $4-1=3$，即 $|\boldsymbol{A}|=0$，若 $k=1$，则 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 1，因此当 $k\neq 1$ 时，$|\boldsymbol{A}|=(1+3k)(1-k)^3$，故 $k=-\dfrac{1}{3}$ 时，$\boldsymbol{A}$ 的秩为 3.

（5）（B）．**提示**　由 $\boldsymbol{PQ}=\boldsymbol{O}$ 有 $R(\boldsymbol{P})+R(\boldsymbol{Q})<3$；$t\neq 6$ 时，$\boldsymbol{Q}$ 的秩为 2，因此 $\boldsymbol{P}$ 的秩小于等于 1，又 $\boldsymbol{P}$ 为 3 阶非零矩阵，故 $\boldsymbol{P}$ 的秩为 1.

（6）（D）．（7）（D）．（8）（C）．（9）（B）.

（10）（A）．**提示**　因为当 $r=m$ 时，$m=R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A}\ \ \boldsymbol{b})\leqslant\min\{m,n\}\leqslant n$；

（11）（D）．**提示**　虽然 $R(\boldsymbol{A})<n$，但是 $R(\boldsymbol{A})$ 与 $R(\boldsymbol{A}\ \ \boldsymbol{b})$ 不一定相等.

（12）（C）．（13）（D）.

（14）（D）．**提示**：$R(\boldsymbol{AB})\leqslant\min\left\{R(\boldsymbol{A}),R(\boldsymbol{B})\right\}\leqslant\min\{m,n\}$，当 $m>n$ 时，$R(\boldsymbol{AB})<m$，$\boldsymbol{ABx}=\boldsymbol{0}$ 必有非零解.

（15）（A）．**提示**　设 $\boldsymbol{x}_0$ 是 Ⅰ 的解，即 $\boldsymbol{Ax}_0=0$，因此 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}_0=0$，故 Ⅰ 的解是 Ⅱ 的解；

设 $\boldsymbol{x}_1$ 是 Ⅱ 的解，即 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}_1=0$，因此 $\boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}_1=0$，所以 $\boldsymbol{Ax}_1=\boldsymbol{0}$，故 Ⅱ 的解也是 Ⅰ 的解.

3.3.3　$$\boldsymbol{A}\to\begin{pmatrix}1&2&3&1&5\\0&0&-6&-3&-13\\0&0&6&3&13\\0&0&-12&-6&-26\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&3&2&1&5\\0&-6&0&-3&-13\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

3.3.4　由于 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价，所以 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})$；而 $|\boldsymbol{A}|=0$，从而 $R(\boldsymbol{A})<n$，故 $R(\boldsymbol{B})<n$，所以有 $|\boldsymbol{B}|=0$.

3.3.5

$$(\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{E})=\left(\begin{array}{ccc:ccc}2&2&3&1&0&0\\1&-1&0&0&1&0\\-1&2&1&0&0&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&-1&0&0&1&0\\0&1&1&0&1&1\\0&0&1&-1&6&4\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&1&-4&-3\\0&1&0&1&-5&-3\\0&0&1&-1&6&4\end{array}\right),$$

故 $\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}1&-4&-3\\1&-5&-3\\-1&6&4\end{pmatrix}$.

3.3.6　$\boldsymbol{A}\to\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&-4&1&1\\0&8&-2&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&-4&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，故 $R(\boldsymbol{A})=2$；$\boldsymbol{A}$ 的一个最高阶非零子式为 $\begin{vmatrix}1&2\\1&-2\end{vmatrix}$.

3.3.7　$A \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & \lambda-3 & -7 \\ 0 & -1 & -2 & 7 \\ 0 & \mu+3 & -2 & 7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & -7 & \lambda-3 & 1 \\ 0 & 7 & -2 & -1 \\ 0 & 7 & -2 & \mu+3 \end{pmatrix}$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & 7 & -2 & -1 \\ 0 & -7 & \lambda-5 & 1 \\ 0 & 7 & -2 & \mu+3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & 7 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda-3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu+4 \end{pmatrix},$$

故 $\lambda = 5, \mu = -4$ 时，A 的秩的最小值是 2；$\lambda \neq 5, \mu \neq -4$ 时，A 的秩的最大值是 4 .

3.3.8　由于 $A + AB = A(E+B)$，而

$$E + B = E + \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \\ 12 & 15 & 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 6 \\ 8 & 11 & 12 \\ 12 & 15 & 19 \end{pmatrix},$$

因此 $|E+B| \neq 0$，故 $E+B$ 可逆．故

$$2 = R(A+AB) = R\big(A(E+B)\big) = R(A),$$

又因为

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & k & 2 \\ 2 & 6 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & k-9 & -10 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix},$$

故 $k = 9$.

3.3.9　由题意

$$|A| = \big(1+(n-1)a\big)(1-a)^{n-1},$$

故 $a \neq -\dfrac{1}{n-1}$ 且 $a \neq 1$ 时，$|A| \neq 0$，因此 $R(A) = n$；当 $a = 1$ 时，

$$A \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

从而 $R(A) = 1$. 当 $a = -\dfrac{1}{n-1}$ 时，

$$A \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a & 1 & a & \cdots & a \\ a & a & 1 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & a & \cdots & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a & 1-a & 0 & \cdots & 0 \\ a & 0 & 1-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & 0 & 0 & \cdots & 1-a \end{pmatrix},$$

故 $R(A) = n-1$.

3.3.10　设 $R(\boldsymbol{A})=r$，因此存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$、$\boldsymbol{Q}$，使得 $\boldsymbol{PAQ}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$，从而有

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}^{-1}\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}\boldsymbol{Q}^{-1},$$

而

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}=\overbrace{\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&\cdots&0\\0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&0\end{pmatrix}+\cdots+\begin{pmatrix}0&\cdots&0&0&\cdots&0\\\vdots&\ddots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&\cdots&1&0&\cdots&0\\0&\cdots&0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&\cdots&0&0&\cdots&0\end{pmatrix}}^{r\text{个}},$$

因此

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}^{-1}\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&0\end{pmatrix}\boldsymbol{Q}^{-1}+\boldsymbol{P}^{-1}\begin{pmatrix}0&0&\cdots&0\\0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&0\end{pmatrix}\boldsymbol{Q}^{-1}+\cdots+\boldsymbol{P}^{-1}\begin{pmatrix}0&\cdots&0&0&\cdots&0\\\vdots&\ddots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&\cdots&1&0&\cdots&0\\0&\cdots&0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&\cdots&0&0&\cdots&0\end{pmatrix}\boldsymbol{Q}^{-1},$$

即 $\boldsymbol{A}$ 表示为 r 个秩为1的矩阵的和.

3.3.11　由于 $\boldsymbol{AA}^*=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$，因此有以下结论.

（1）若 $R(\boldsymbol{A})=n$，则 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$，因此 $|\boldsymbol{A}^*|\neq 0$，故 $R(\boldsymbol{A}^*)=n$.

（2）若 $R(\boldsymbol{A})=n-1$，则 $|\boldsymbol{A}|=0$，因此 $\boldsymbol{AA}^*=\boldsymbol{O}$. 由于 $R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{A}^*)\leqslant n$，因此 $R(\boldsymbol{A}^*)\leqslant 1$. 再由 $R(\boldsymbol{A})=n-1$ 知 $\boldsymbol{A}$ 中至少存在一个 $n-1$ 阶非零子式，因此 $\boldsymbol{A}^*$ 中至少存在一个非零元素，故 $R(\boldsymbol{A}^*)=1$.

（3）若 $R(\boldsymbol{A})<n-1$，$\boldsymbol{A}$ 中所有 $n-1$ 阶子式均为零，因此 $\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{O}$，故 $R(\boldsymbol{A}^*)=0$.

3.3.12　**必要性**　方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{E}$ 有解，而

$$m=R(\boldsymbol{E})=R(\boldsymbol{AX})\leqslant R(\boldsymbol{A})\leqslant m,$$

故 $R(\boldsymbol{A})=m$.

充分性　因为 $R(\boldsymbol{A})=m$，故存在 m 阶可逆阵 $\boldsymbol{P}$ 和 n 阶可逆阵 $\boldsymbol{Q}$ 使得 $\boldsymbol{PAQ}=(\boldsymbol{E}_m\quad \boldsymbol{O})$，因此

$$\boldsymbol{AQ}=\boldsymbol{P}^{-1}(\boldsymbol{E}_m\quad \boldsymbol{O}).$$

进而

$$\boldsymbol{AQ}\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_m\\ \boldsymbol{O}\end{pmatrix}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}^{-1}(\boldsymbol{E}_m\quad \boldsymbol{O})\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_m\\ \boldsymbol{O}\end{pmatrix}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{E},$$

故 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Q}\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_m\\ \boldsymbol{0}\end{pmatrix}\boldsymbol{P}$ 为方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{E}_m$ 的解.

3.3.13 利用初等行变换，有

$$(\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{b})=\begin{pmatrix}1&-2&1&1&1\\1&-2&1&-1&-1\\1&-2&1&5&5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2&1&1&1\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2&1&0&0\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix},$$

因为 $R(\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{b})=R(\boldsymbol{A})=2<4$，所以方程组有无穷多解，上述矩阵对应的的方程组为

$$\begin{cases}x_1-2x_2+x_3=0\\x_4=1\end{cases},$$

解得方程组的解为

$$\begin{cases}x_1=2c_1-c_2\\x_2=c_1\\x_3=c_2\\x_4=1\end{cases}\quad（c_1,c_2\text{ 为任意常数}）.$$

3.3.14 利用矩阵的初等行变换，有

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&2&2&7\\2&3&4&5&0\\3&5&6&8&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&2&1&21\\0&1&0&1&-14\\0&0&0&0&7\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&2&1&0\\0&1&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix},$$

上述矩阵对应的方程组为

$$\begin{cases}x_1+2x_3+x_4=0\\x_2+x_4=0\\x_5=0\end{cases},$$

方程组的解为

$$\begin{cases}x_1=-2c_1-c_2\\x_2=-c_2\\x_3=c_1\\x_4=c_2\\x_5=0.\end{cases}\quad（\text{其中 }c_1,c_2\text{ 为任意常数}）.$$

3.3.15 利用矩阵的初等行变换，有

$$(\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{b})=\begin{pmatrix}1&0&1&-1&-3\\2&-1&4&-3&-4\\3&1&\lambda&0&1\\7&0&7&-3&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1&-1&-3\\0&-1&2&-1&2\\0&1&\lambda-3&3&10\\0&0&0&4&24\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1&-1&-3\\0&1&-2&1&-2\\0&0&\lambda-1&0&0\\0&0&0&1&6\end{pmatrix},$$

当 $\lambda\neq1$ 时，方程组有唯一解

$$\begin{cases}x_1=3\\x_2=-8\\x_3=0\\x_4=6\end{cases},$$

当 $\lambda=1$ 时，由于

$$(\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{b}) \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

此时 $R(\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{b})=R(\boldsymbol{A})=3<4$，故方程组有无穷多解．上述矩阵对应的方程组为

$$\begin{cases} x_1 = 3 - x_3 \\ x_2 = -8 + 2x_3 \\ x_4 = 6 \end{cases}.$$

因此方程组的所有解为

$$\begin{cases} x_1 = 3 - c \\ x_2 = -8 + 2c \\ x_3 = c \\ x_4 = 6 \end{cases} \quad （c \text{ 为任意实数}）.$$

3.3.16　利用矩阵的初等行变换，有

$$(\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{b}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & a-3 & -2 & b \\ 3 & 2 & 1 & a & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 & b+1 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 & 0 \end{pmatrix}.$$

当 $a\neq 1$ 时， $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{b})=4$，方程组有唯一解．

当 $a=1$， $b\neq -1$ 时， $R(\boldsymbol{A})=2$， $R(\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{b})=3$，方程组无解．

当 $a=1$， $b=-1$ 时， $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{b})=2<4$，方程组有无穷多解，此时

$$(\boldsymbol{A}\;\;\boldsymbol{b}) \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

上述矩阵对应的方程组为

$$\begin{cases} x_1 = -1 + x_3 + x_4 \\ x_2 = 1 - 2x_3 - 2x_4 \end{cases},$$

故方程组的全部解为

$$\begin{cases} x_1 = -1 + c_1 + c_2 \\ x_2 = 1 - 2c_1 - 2c_2 \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = c_2 \end{cases} \quad （c_1, c_2 \text{ 为任意实数}）.$$

3.5　综合提高训练

例 3.5.1　【2011（1，2，3）】设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵，将 $\boldsymbol{A}$ 的第 2 列加到第 1 列得到矩阵 $\boldsymbol{B}$，再交换 $\boldsymbol{B}$ 的第 2 行和第 3 行得到单位矩阵，记 $\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}=$（　　）.

（A）$\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2$；　　（B）$\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{P}_2$；　　（C）$\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1$；　　（D）$\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1^{-1}$.

解　将 $\boldsymbol{A}$ 的第 2 列加到第 1 列得到矩阵 $\boldsymbol{B}$，即

$$\boldsymbol{AP}_1=\boldsymbol{B}，\quad \boldsymbol{A}=\boldsymbol{BP}_1^{-1}，$$

交换 $\boldsymbol{B}$ 的第 2 行和第 3 行得到单位矩阵，即

$$\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}，\quad \boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}_2^{-1}=\boldsymbol{P}_2，$$

故 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1^{-1}$，选项（D）正确.

例 3.5.2　【2006（1，2，3）】设 $\boldsymbol{A}$ 为3阶矩阵，将 $\boldsymbol{A}$ 的第2行加到第1行得到矩阵 $\boldsymbol{B}$，再交换 $\boldsymbol{B}$ 的第1列的 -1 倍加到第2列得到 $\boldsymbol{C}$，记 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，则（　　）正确.

（A）$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$；　　（B）$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{PAP}^{-1}$；　　（C）$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AP}$；　　（D）$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{PAP}^{\mathrm{T}}$.

解　由已知有 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{PA}$，由于 $\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，因此 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{BP}^{-1}$，故 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{PAP}^{-1}$，则（B）正确.

例 3.5.3　【2005（1，2）】设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶可逆矩阵，交换 $\boldsymbol{A}$ 的第1行与第2行得到矩阵 $\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{A}^*$、$\boldsymbol{B}^*$，分别为 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 伴随矩阵，则（　　）正确.

（A）交换 $\boldsymbol{A}^*$ 的第1列与第2列得到矩阵 $\boldsymbol{B}^*$；

（B）交换 $\boldsymbol{A}^*$ 的第1行与第2行得到矩阵 $\boldsymbol{B}^*$；

（C）交换 $\boldsymbol{A}^*$ 的第1列与第2列得到矩阵 $-\boldsymbol{B}^*$；

（D）交换 $\boldsymbol{A}^*$ 的第1行与第2行得到矩阵 $-\boldsymbol{B}^*$.

解　设 $\boldsymbol{P}$ 是交换单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 的第1、2行所得到的初等矩阵，则 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{PA}$，从而可得到

$$\boldsymbol{B}^{-1}=(\boldsymbol{PA})^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{P}^{-1}，$$

进而

$$\boldsymbol{B}^*=|\boldsymbol{B}|\boldsymbol{B}^{-1}=-|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{P}^{-1}=-\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{P}，$$

故（C）正确.

例 3.5.4　【2004（1，2）】设 $\boldsymbol{A}$ 为3阶矩阵，将 $\boldsymbol{A}$ 的第1列与第2列交换得到矩阵 $\boldsymbol{B}$，再把 $\boldsymbol{B}$ 的第2列加到第3列得到 $\boldsymbol{C}$，则满足 $\boldsymbol{AQ}=\boldsymbol{C}$ 的可逆矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 为（　　）.

（A）$\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\1&0&1\end{pmatrix}$；　　（B）$\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}$；　　（C）$\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&1&1\end{pmatrix}$；　　（D）$\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

解　令 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$，则 $\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{C}$. 故（D）正确.

例 3.5.5　【2004（1）】设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 为 $n\times m$ 矩阵，$\boldsymbol{E}$ 为 m 阶单位矩阵. 若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$，则（　　）正确.

（A）秩 $R(\boldsymbol{A})=m$，秩 $R(\boldsymbol{B})=m$；　　（B）秩 $R(\boldsymbol{A})=m$，秩 $R(\boldsymbol{B})=n$；

（C）秩 $R(\boldsymbol{A})=n$，秩 $R(\boldsymbol{B})=m$；　　（D）秩 $R(\boldsymbol{A})=n$，秩 $R(\boldsymbol{B})=n$.

解法 1　由于

$$R(\boldsymbol{A})\leqslant \min\{m,n\}\leqslant m,\quad R(\boldsymbol{B})\leqslant \min\{m,n\}\leqslant m,$$

由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$ 可知，

$$m=R(\boldsymbol{E})=R(\boldsymbol{AB})\leqslant \min\{R(\boldsymbol{A}),R(\boldsymbol{B})\},$$

即 $R(\boldsymbol{A})\geqslant m$，$R(\boldsymbol{B})\geqslant m$. 因此 $R(\boldsymbol{A})=m$，$R(\boldsymbol{B})=m$，故（A）正确.

解法 2　令

$$m=2,\quad n=3,\quad \boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{pmatrix},$$

则 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$ 满足已知条件. 而 $R(\boldsymbol{A})=2$，$R(\boldsymbol{B})=2$，故（A）正确.

例 3.5.6　【2012（3）】设 $\boldsymbol{A}$ 为3阶矩阵，$|\boldsymbol{A}|=3$，$\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 伴随矩阵，若将 $\boldsymbol{A}$ 的第1行与第2行交换得到矩阵 B，则 $|\boldsymbol{BA}^*|=$________.

解法 1　由行列式的性质可知 $|\boldsymbol{B}|=-|\boldsymbol{A}|=-3$，而 $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^2=9$，故 $|\boldsymbol{BA}^*|=-27$.

解法 2　记 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，则 $|\boldsymbol{P}|=-1$，且 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{PA}$，故

$$|\boldsymbol{BA}^*|=|\boldsymbol{PAA}^*|=||\boldsymbol{A}|\boldsymbol{P}|=|\boldsymbol{A}|^3|\boldsymbol{P}|=-27.$$

例 3.5.7　【2016（2）】矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a&-1&-1\\-1&a&-1\\-1&-1&a\end{pmatrix}$ 与 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&-1&1\\1&0&1\end{pmatrix}$ 等价，则 $a=$________.

解　由 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价，有 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})$，而 $R(\boldsymbol{B})=2$，故 $R(\boldsymbol{A})=2$，再由

$$\boldsymbol{A}\to\begin{pmatrix}-1&-1&a\\0&a+1&-1-a\\0&0&(a-2)(a+1)\end{pmatrix},$$

因此 $a=2$.

例 3.5.11　【2016（1）】设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\2&a&1\\-1&1&a\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&2\\1&a\\-a-1&-2\end{pmatrix}$，当 a 为何值时，方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 无解、有唯一解、有无穷多解？在有解时，求此方程组的解.

解　由矩阵的初等行变换有

$$(\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{B})=\begin{pmatrix}1&-1&-1&2&2\\2&a&1&1&a\\-1&1&a&-a-1&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&-1&2&2\\0&a+2&3&-3&a-4\\0&0&a-1&-a+1&0\end{pmatrix},$$

当 $a=-2$ 时，方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 无解.

当 $a\neq-2$ 且 $a\neq1$ 时，方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 有唯一解，此时

$$(\boldsymbol{A}\ \ \boldsymbol{B})\to\begin{pmatrix}1&-1&-1&2&2\\0&a+2&3&-3&a-4\\0&0&1&-1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&1&\dfrac{3a}{a+2}\\0&1&0&0&\dfrac{a-4}{a+2}\\0&0&1&-1&0\end{pmatrix},$$

因此方程组的解为 $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}1&\dfrac{3a}{a+2}\\0&\dfrac{a-4}{a+2}\\-1&0\end{pmatrix}$.

当 $a=1$ 时，方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 有无穷多解，此时

$$(\boldsymbol{A}\ \ \boldsymbol{B})\to\begin{pmatrix}1&-1&-1&2&2\\0&3&3&-3&-3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&1&1\\0&1&1&-1&-1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix},$$

因此方程组的解为 $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}1&1\\-1-c_1&-1-c_2\\c_1&c_2\end{pmatrix}$　（c_1,c_2 为任意实数）.

第 4 章　向量组的线性相关性

4.1　知 识 要 点

4.1.1　向量的线性组合（线性表示）

给定向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$和向量$\boldsymbol{\beta}$，若存在一组数$k_1,k_2,\cdots,k_s$使得

$$\boldsymbol{\beta}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s，$$

则称向量$\boldsymbol{\beta}$可由向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$**线性表示**，或称向量$\boldsymbol{\beta}$是向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$的**线性组合**.

向量$\boldsymbol{\beta}$可由向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性表示$\Leftrightarrow$线性方程组$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_s\boldsymbol{\alpha}_s=\boldsymbol{\beta}$有解$\Leftrightarrow R(\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{\alpha}_s)=R(\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\ \boldsymbol{\beta})$.

设两个向量组$\boldsymbol{A}$：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$，$\boldsymbol{B}$：$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$，若$\boldsymbol{B}$中的每个向量$\boldsymbol{\beta}_i\ (i=1,2,\cdots,t)$都可由向量组$\boldsymbol{A}$中的$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性表示，则称向量组$\boldsymbol{B}$可由向量组$\boldsymbol{A}$线性表示；若向量组$\boldsymbol{A}$与向量组$\boldsymbol{B}$可以相互线性表示，则称这两个**向量组等价**.

向量组$\boldsymbol{B}$：$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$能由向量组$\boldsymbol{A}$：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性表示可以写成

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)\begin{pmatrix}k_{11}&k_{12}&\cdots&k_{1t}\\k_{21}&k_{22}&\cdots&k_{2t}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\k_{s1}&k_{s2}&\cdots&k_{st}\end{pmatrix},$$

其中，矩阵$\begin{pmatrix}k_{11}&k_{12}&\cdots&k_{1t}\\k_{21}&k_{22}&\cdots&k_{2t}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\k_{s1}&k_{s2}&\cdots&k_{st}\end{pmatrix}$为线性表示的**系数矩阵**.

4.1.2　向量组的线性相关性

（1）向量组线性相关的概念

设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$为一个$n$维向量组，若存在一组不全为零的数$k_1$，$k_2$，…，$k_m$使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\boldsymbol{0}，$$

成立，则称向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$**线性相关**；否则称向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$**线性无关**.

$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性相关$\Leftrightarrow$齐次线性方程组$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\boldsymbol{0}$有非零解

$$\Leftrightarrow R(\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{\alpha}_m)<m.$$

$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性无关$\Leftrightarrow$齐次线性方程组$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\boldsymbol{0}$只有零解

$$\Leftrightarrow R(\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{\alpha}_m)=m.$$

特别地，若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 为一个 n 维向量组，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性相关 $\Leftrightarrow \left|\boldsymbol{A}\right|=0$； $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关 $\Leftrightarrow \left|\boldsymbol{A}\right|\neq 0$.

对于 n 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ ，若 $m>n$ ，则其必线性相关.

（2）向量组线性相关性的几个结论

1）设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ $(m\geqslant 2)$ 为一个 n 维向量组，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关 $\Leftrightarrow$ 存在着一个向量 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 可由其余向量线性表示.

2）设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关，而 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ ， $\boldsymbol{\beta}$ 线性相关，则 $\boldsymbol{\beta}$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示，且表示方法唯一.

3）若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 存在部分组 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 线性相关，则向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关；反之，若向量组线性无关，则它的任何部分组也线性无关.

4）设向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_k$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表示，若 $k>s$ ，则向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_k$ 线性相关；反之，若向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_k$ 线性无关，则 $k\leqslant s$.

特别地，若两个线性无关的向量组等价，则它们所含向量的个数必相等.

4.1.3　向量组的极大线性无关组的定义与性质

（1）极大线性无关组的定义

向量组的极大线性无关组有以下两个等价的定义形式.

定义 1　若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中的 r 个向量 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 满足

1）向量组 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 线性无关，

2）向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中任意 r+1 个向量（如果存在）线性相关，则称向量组 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的一个**极大线性无关组**.

定义 2　若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中的 r 个向量 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 满足

1）向量组 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 线性无关，

2）向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中任意一个向量都可被 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 线性表示，则称向量组 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的一个**极大线性无关组**.

（2）极大线性无关组的性质

1）向量组与它的极大线性无关组等价.

2）一般的，向量组的极大线性无关组并不唯一，但不同的极大线性无关组所含的向量的个数相等.

（3）向量组的秩

向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的极大线性无关组所含向量的个数称为该向量组的**秩**，记作 $R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)$.

4.1.4　线性方程组解的结构

（1）齐次线性方程组解的结构

齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解集的最大线性无关组称为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的**基础解系**.

若齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 系数矩阵的秩 $R(\boldsymbol{A})=r<n$ ，则该方程组存在基础解系，且每个基础解系所含解向量的个数均为 $n-r$.

若已知 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots\boldsymbol{\eta}_{n-r}$ 是齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系，则齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的全部解可表示为

$$\boldsymbol{x}=c_1\boldsymbol{\eta}_1+c_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+c_{n-r}\boldsymbol{\eta}_{n-r},$$

其中 $c_1,c_2,\cdots,c_{n-r}$ 为任意实数，上式称为齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的**通解**.

（2）非齐次线性方程组解的结构

对于非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$，称 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ **对应的齐次线性方程组**（也称为**导出组**）.

设 $\boldsymbol{\eta}$ 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的一个解（**特解**），$\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots\boldsymbol{\eta}_{n-r}$ 是其导出组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的全部解可表示为

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\eta}+c_1\boldsymbol{\eta}_1+c_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+c_{n-r}\boldsymbol{\eta}_{n-r},$$

其中，$c_1,c_2,\cdots,c_{n-r}$ 为任意实数，上式称为非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的**通解**.

4.1.5 向量空间的概念与性质

（1）向量空间

设 $\boldsymbol{V}$ 是实数域 R 上 n 维向量组成的非空集合，若集合 $\boldsymbol{V}$ 对向量的加法及数乘运算封闭，即

1）若 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in\boldsymbol{V}$，则 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\in\boldsymbol{V}$，

2）若 $\boldsymbol{\alpha}\in\boldsymbol{V},k\in\mathrm{R}$，则 $k\boldsymbol{\alpha}\in\boldsymbol{V}$，则称 $\boldsymbol{V}$ 是数域 R 上的一个**向量空间**.

特别地，实数域 R 上的全体 n 维向量组成的向量空间记为 $\boldsymbol{R}^n$，即

$$\boldsymbol{R}^n=\left\{(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}\mid a_i\in\mathrm{R},i=1,2,\cdots,n\right\}.$$

若 $\boldsymbol{V}_1,\boldsymbol{V}_2$ 都是向量空间，且 $\boldsymbol{V}_1\subseteq\boldsymbol{V}_2$，则称 $\boldsymbol{V}_1$ 是 $\boldsymbol{V}_2$ 的子空间.

（2）空间的基与维数

设 $\boldsymbol{V}$ 是数域 R 上的一个向量空间，若有 r 个向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r\in\boldsymbol{V}$，且满足

1）$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关，

2）$\boldsymbol{V}$ 中任意一个向量都可以被 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性表示，则称向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 是向量空间 $\boldsymbol{V}$ 中的一个**基**，r 称为向量空间 $\boldsymbol{V}$ 的**维数**，记作 $\dim\boldsymbol{V}$，即 $\dim\boldsymbol{V}=r$.

（3）向量的坐标

设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 是向量空间 $\boldsymbol{V}$ 中的一个基，$\boldsymbol{V}$ 中的向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 表示为

$$\boldsymbol{\alpha}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_r\boldsymbol{\alpha}_r,$$

则称数组 $x_1,x_2,\cdots,x_r$ 为向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 下的**坐标**. 向量在一个基下的坐标是唯一的.

（4）基变换公式与坐标变换公式

设空间 $\mathbf{R}^r$ 中两个基分别为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 和 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$，并且有

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r)\boldsymbol{P},$$

称 $\boldsymbol{P}$ 为从基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 到基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$ 的**过渡矩阵**. 对于 $\mathbf{R}^r$ 中的向量 $\boldsymbol{\alpha}$，若 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 下的坐标为 $x_1,x_2,\cdots,x_r$，在基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$ 下的坐标为 $y_1,y_2,\cdots,y_r$，则有

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_r \end{pmatrix} = \boldsymbol{P}^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix}，或 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} = \boldsymbol{P} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_r \end{pmatrix}.$$

4.2　典型例题分析

4.2.1　题型一、向量线性表示的相关问题

例 4.2.1　设向量组 $\boldsymbol{\beta}=(0,0,0,1)$，$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,0,1)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,1,3,1)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,1,0,0)$，判断 $\boldsymbol{\beta}$ 是否可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示？如果可以，写出其表达式.

解　利用矩阵的初等行变有

$$(\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

从而

$$R(\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}) = R(\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm{T}}),$$

因此 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，并且 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_3$.

例 4.2.2　设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix} a \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ c \end{pmatrix}$，试问当 a、c 为何值时：

（1）$\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，且表示法唯一；

（2）$\boldsymbol{\beta}$ 不可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示；

（3）$\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，但表示法不唯一.

解　利用矩阵的初等行变换有

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}) = \begin{pmatrix} a & -2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 10 & 5 & 4 & c \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2-\dfrac{a}{2} & -1-\dfrac{a}{2} & 1 \\ 0 & 0 & -1 & c \end{pmatrix},$$

（1）当 $a\neq-4$ 时，$R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta})=R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=3$，因此 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，且表示法唯一；

（2）当 $a=-4$，$c\neq-1$ 时，有

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}) \to \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

由于 $R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta})\neq R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，因此 $\boldsymbol{\beta}$ 不可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示；

（3）当 $a=-4$， $c=-1$ 时，有

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta})\rightarrow\begin{pmatrix}2&1&0&-1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

由于 $R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta})=R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=2<3$，因此 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，且表示法不是唯一的.

例 4.2.3　设两个向量组

$$\boldsymbol{A}:\boldsymbol{\alpha}_1=(3,4,8)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(2,2,5)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(0,2,1)^{\mathrm{T}}；\quad \boldsymbol{B}:\boldsymbol{\beta}_1=(1,2,3)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_2=(1,0,2)^{\mathrm{T}}$$

证明向量组 $\boldsymbol{A}$ 与向量组 $\boldsymbol{B}$ 等价.

证　利用矩阵的初等行变换有

$$\left(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\right)=\begin{pmatrix}1&1&3&2&0\\2&0&4&2&2\\3&2&8&5&1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&2&1&1\\0&1&1&1&-1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix},$$

故

$$\boldsymbol{\alpha}_1=2\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2,\quad \boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2,\quad \boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2,$$

反之可得

$$\boldsymbol{\beta}_1=\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_2+\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_3,\quad \boldsymbol{\beta}_2=\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_3,$$

所以向量组 $\boldsymbol{A}$ 与向量组 $\boldsymbol{B}$ 等价.

4.2.2　题型二、向量组的线性相关性问题

例 4.2.4　设 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\3\end{pmatrix}$， $\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\2\\5\\7\end{pmatrix}$， $\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\3\\6\\10\end{pmatrix}$，判断 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是否线性相关.

解　利用矩阵的初等行变换有

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&2&3\\1&5&6\\3&7&10\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&2\\0&5&5\\0&7&7\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

从而 $R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=2<3$，所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关.

例 4.2.5　设 $\boldsymbol{\alpha}_1=(3,1,1)^{\mathrm{T}}$， $\boldsymbol{\alpha}_2=(1,\ -1,\ 4)^{\mathrm{T}}$， $\boldsymbol{\alpha}_2=(0,\ 5,\ 2)^{\mathrm{T}}$，判断 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的线性相关性.

解　因为

$$\left|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\right|=\begin{vmatrix}3&1&0\\1&-1&5\\1&4&2\end{vmatrix}=-63\neq0,$$

所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

例 4.2.6 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\3\\t\end{pmatrix}$，讨论当 t 为何值时：

（1）$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关；（2）$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

解 由于

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&3&t\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&2\\0&0&t-5\end{pmatrix},$$

（1）$t=5$ 时，$R\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\right)=2<3$，因此 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关．由于

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\to\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix},$$

故 $\boldsymbol{\alpha}_3=-\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$.

（2）$t\neq5$ 时，由于 $R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=3$，因此 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

例 4.2.7 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关，证明：

（1）$\boldsymbol{\alpha}_1$ 可被 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示；（2）$\boldsymbol{\alpha}_4$ 不能被 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

证 （1）由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关，则它的部分组 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，而向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关，则 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 可被 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

（2）反证法．假设 $\boldsymbol{\alpha}_4$ 能被 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，且有

$$\boldsymbol{\alpha}_4=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3,$$

再由（1）有 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 可被 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，不妨设 $\boldsymbol{\alpha}_1=x_1\boldsymbol{\alpha}_2+x_2\boldsymbol{\alpha}_3$，代入上式有

$$\boldsymbol{\alpha}_4=(k_1x_1+k_2)\boldsymbol{\alpha}_2+(k_1x_2+k_3)\boldsymbol{\alpha}_3,$$

即 $\boldsymbol{\alpha}_4$ 能被 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，这与向量组 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关矛盾，因此原命题成立.

例 4.2.8 设 $a_1,a_2,\cdots,a_r$ 是一组互不相同的数，令向量 $\boldsymbol{\alpha}_i=(1,a_i,\cdots,a_i^{n-1})^{\mathrm{T}}$，$i=1,2,\cdots,r$. 证明：若 $r<n$，则向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关.

证 依题意

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r)=\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\a_1&a_2&\cdots&a_r\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_1^{n-1}&a_2^{n-1}&\cdots&a_r^{n-1}\end{pmatrix},$$

再因为 $a_1,a_2,\cdots,a_r$ 互不相同及 $r<n$，根据范德蒙德行列式有 $\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r\right)$ 存在 r 阶非零子式（前 r 行、对应行列式），因此 $R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r)=r$，故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关.

例 4.2.9 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关，向量 $\boldsymbol{\beta}_1$ 可由它线性表示，向量 $\boldsymbol{\beta}_2$ 不能由它线性表示．证明：向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,l\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2$ 线性无关，其中 l 为某个实数.

证 设存在 $k_1,k_2,\cdots,k_r,k$ 使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{\alpha}_r+k(l\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2)=\mathbf{0},$$

若 $k\neq 0$，则有 $\boldsymbol{\beta}_2$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\beta}_1$ 线性表示，因为 $\boldsymbol{\beta}_1$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性表示，从而 $\boldsymbol{\beta}_2$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性表示，这与已知矛盾．因此 $k=0$，进而有

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{\alpha}_r=\mathbf{0},$$

再由于 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关，有

$$k_1=k_2=\cdots=k_r=0 .$$

因此 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$，$l\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2$ 线性无关．

4.2.3　题型三、极大线性无关组及秩的求解

例 4.2.10　求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&-1&-1&1&2\\1&1&-2&1&4\\4&-6&2&-2&4\\3&6&-9&7&9\end{pmatrix}$ 的列向量组的一个极大线性无关组，并将其余的向量用所求的极大线性无关组线性表示．

解　对 $\boldsymbol{A}$ 进行初行变换有

$$\boldsymbol{A}\to\begin{pmatrix}1&1&-2&1&4\\0&1&-1&-1&0\\0&0&0&1&-3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1&0&4\\0&1&-1&0&3\\0&0&0&1&-3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix},$$

故 $R(\boldsymbol{A})=3$，记 $\boldsymbol{A}=\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5\right)$，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$ 为极大线性无关组，并且有

$$\boldsymbol{\alpha}_3=-\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\quad \boldsymbol{\alpha}_5=4\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2-3\boldsymbol{\alpha}_4 .$$

例 4.2.11　求向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,6,6)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,0,3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(3,2,9)^{\mathrm{T}}$ 的一个极大线性无关组，并将其余向量用该向量组线性表示．

解　由题意并结合初等变换有

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=\begin{pmatrix}1&2&1&3\\2&6&0&2\\3&6&3&9\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&1&3\\0&2&-2&-4\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&3&7\\0&1&-1&-2\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

故 $R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=2$，取 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 为极大线性无关组，进而

$$\boldsymbol{\alpha}_3=3\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\quad \boldsymbol{\alpha}_4=7\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2 .$$

例 4.2.12　设有向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}9\\6\\-7\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}a\\2\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_3=\begin{pmatrix}b\\1\\0\end{pmatrix},$$

若 $\boldsymbol{\beta}_3$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，且 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 有相同的秩，求 a,b 的值．

解　利用矩阵的初等行变换，有

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_3)=\begin{pmatrix}1&3&9&b\\2&0&6&1\\-3&1&-7&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&3&9&b\\0&-6&-12&1-2b\\0&0&0&(5-b)/3\end{pmatrix},$$

由于 $\boldsymbol{\beta}_3$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，从而 $R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_3)=R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=2$，因此 $b=5$.

并且此时，再由

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=\begin{pmatrix}0&a&5\\1&2&1\\-1&1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&1\\0&3&1\\0&a-15&0\end{pmatrix},$$

易得 $a=15$.

例 4.2.13　设三维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\a\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\b\end{pmatrix}$，已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 与向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 等价.

（1）求未知参数 a,b 的值.

（2）求向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的秩及其一个极大无关组.

（3）求向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 表示 $\boldsymbol{\beta}_1$ 的表达式.

解　由矩阵的初等行变换有

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2)=\begin{pmatrix}1&-1&1&1&0\\2&1&1&0&1\\1&2&0&a&b\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&1&1&0\\0&3&-1&-2&1\\0&0&0&a+1&b-1\end{pmatrix}.$$

（1）由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 与向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 等价，有 $a=-1,b=1$.

（2）$R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=2$，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的一个极大无关组.

（3）由于

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1)=\begin{pmatrix}1&-1&1&1\\2&1&1&0\\1&2&0&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&0&-1\\0&-3&1&2\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

故

$$\boldsymbol{\beta}_1=(-1-2c)\boldsymbol{\alpha}_1+c\boldsymbol{\alpha}_2+(2+3c)\boldsymbol{\alpha}_3\qquad（c\text{ 为任意实数}）.$$

例 4.2.14　给定向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$，令 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4$，向量组

$$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_4=\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}_4.$$

证明：$R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=R(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4)$.

证　由题意有

$$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4,\quad \boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4,$$

$$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_4,\quad \boldsymbol{\beta}_4=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,$$

即

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)\begin{pmatrix}0&1&1&1\\1&0&1&1\\1&1&0&1\\1&1&1&0\end{pmatrix},$$

而$\begin{vmatrix}0&1&1&1\\1&0&1&1\\1&1&0&1\\1&1&1&0\end{vmatrix}=-3\neq 0$，因此有

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4)\begin{pmatrix}0&1&1&1\\1&0&1&1\\1&1&0&1\\1&1&1&0\end{pmatrix}^{-1},$$

所以向量组$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$与向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$等价，故结论成立.

例 4.2.15　设向量组

$$\text{I}:\ \boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m;\qquad \text{II}:\ \boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t;\qquad \text{III}:\ \boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t.$$

它们的秩分别为r_1、r_2、r_3．证明：$\max(r_1,r_2)\leqslant r_3\leqslant r_1+r_2$．

证　设这三个向量组的极大无关组分别为：

$$\text{I}':\ \boldsymbol{\alpha}_{i1},\boldsymbol{\alpha}_{i2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{ir_1};\quad \text{II}':\ \boldsymbol{\beta}_{j1},\boldsymbol{\beta}_{j2},\cdots,\boldsymbol{\beta}_{jr_2};\quad \text{III}':\ \boldsymbol{\gamma}_{k1},\boldsymbol{\gamma}_{k2},\cdots,\boldsymbol{\gamma}_{kr_3}.$$

由于Ⅰ可由Ⅲ线性表示，因此Ⅰ′可由Ⅲ′线性表示，所以$r_1\leqslant r_3$，同理$r_2\leqslant r_3$，再由于Ⅲ可由Ⅰ、Ⅱ线性表示，故Ⅲ′可由Ⅰ′、Ⅱ′线性表示，因此$r_3\leqslant r_1+r_2$，故结论成立.

4.2.4　题型四、线性方程组解的相关问题

例 4.2.16　求解齐次线性方程组$\begin{cases}x_1-2x_2+3x_3-4x_4=0\\x_2-x_3+x_4=0\\x_1+3x_2+x_4=0\end{cases}$.

解　利用初等行变换，有

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-2&3&-4\\0&1&-1&1\\1&3&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2&3&-4\\0&1&-1&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&-2\\0&1&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix},$$

上述矩阵对应的方程组为

$$\begin{cases}x_1=2x_4\\x_2=-x_4\\x_3=0\end{cases}.$$

故方程组基础解系为$\boldsymbol{\eta}=(2,-1,0,1)^{\mathrm{T}}$，因此方程组的通解为$c\boldsymbol{\eta}$（$c$为任意实数）.

例 4.2.17　求解线性方程组$\begin{cases} x_1+x_2-2x_3+4x_4=0 \\ 2x_1+5x_2-4x_3+11x_4=-3 \\ x_1+2x_2-2x_3+5x_4=-1 \end{cases}$.

解　利用初等行变换，有

$$(\boldsymbol{A}\ \ \boldsymbol{b})=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 & 0 \\ 2 & 5 & -4 & 11 & -3 \\ 1 & 2 & -2 & 5 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

上述矩阵对应的方程组为

$$\begin{cases} x_1=1+2x_3-3x_4 \\ x_2=-1-x_4 \end{cases},$$

因此非齐次线性方程组的一个特解$\boldsymbol{\eta}=(1,-1,0,0)^{\mathrm{T}}$，而对应的导出组为

$$\begin{cases} x_1=2x_3-3x_4 \\ x_2=-x_4 \end{cases},$$

导出组的基础解系为$\boldsymbol{\eta}_1=(2,0,1,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\eta}_2=(-3,-1,0,1)^{\mathrm{T}}$，因此方程组的通解为

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\eta}+c_1\boldsymbol{\eta}_1+c_2\boldsymbol{\eta}_2 \quad （c_1,c_2\text{ 为任意常数}）.$$

例 4.2.18　设有线性方程组

$$\begin{cases} kx_1+x_2+x_3=k-3 \\ x_1+kx_2+x_3=-2 \\ x_1+x_2+kx_3=-2 \end{cases}.$$

讨论常数k为何值时，方程组无解、有唯一解、有无穷多解？当方程组有无穷多解时，求出其通解.

解　利用初等行变换，有

$$(\boldsymbol{A}\ \ \boldsymbol{b})=\begin{pmatrix} k & 1 & 1 & k-3 \\ 1 & k & 1 & -2 \\ 1 & 1 & k & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & k & -2 \\ 0 & k-1 & 1-k & 0 \\ 0 & 0 & -(k+2)(k-1) & 3(k-1) \end{pmatrix},$$

当$k=-2$时，$R(\boldsymbol{A})=2$，$R(\boldsymbol{A}\ \ \boldsymbol{b})=3$，因此方程组无解.

当$k\neq -2$且$k\neq 1$时，$R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A}\ \ \boldsymbol{b})=3$，方程组有唯一解.

当$k=1$时，$R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A}\ \ \boldsymbol{b})=1$，方程组有无穷多解，此时

$$(\boldsymbol{A}\ \ \boldsymbol{b})\to\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

上述矩阵对应的方程为

$$x_1=-2-x_2-x_3,$$

因此方程组的一个特解$\boldsymbol{\eta}=(-2,0,0)^{\mathrm{T}}$，而其导出组为

$$x_1=-x_2-x_3,$$

导出组的基础解系为 $\boldsymbol{\eta}_1=(-1,1,0)^{\mathrm{T}}$， $\boldsymbol{\eta}_2=(-1,0,1)^{\mathrm{T}}$，因此方程组的通解为

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\eta}+c_1\boldsymbol{\eta}_1+c_2\boldsymbol{\eta}_2 \qquad （c_1,c_2\text{ 为任意常数}）.$$

例 4.2.19　当 a、b 为何值时，方程组 $\begin{cases}x_1+bx_2+x_3=3\\ax_1+x_2+x_3=4\\x_1+2bx_2+x_3=4\end{cases}$ 无解、有唯一解、有无穷多解？在无穷多解的时，求出通解.

解　利用初等行变换，有

$$(\boldsymbol{A}\ \ \boldsymbol{b})=\begin{pmatrix}1&b&1&3\\a&1&1&4\\1&2b&1&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1&2\\0&1-ab&1-a&4-3a\\0&b&0&1\end{pmatrix},$$

（1）当 $a\neq1$ 且 $b\neq0$ 时， $R(\boldsymbol{A}\ \ \boldsymbol{b})=R(\boldsymbol{A})=3$，方程组有唯一解.

（2）当 $a=1$ 时，由于

$$(\boldsymbol{A}\ \ \boldsymbol{b})=\begin{pmatrix}1&0&1&2\\0&1-b&0&1\\0&b&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1&2\\0&1&0&2\\0&b&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1&2\\0&1&0&2\\0&0&0&1-2b\end{pmatrix},$$

若 $b=\dfrac{1}{2}$，则 $R(\boldsymbol{A}\ \ \boldsymbol{b})=R(\boldsymbol{A})=2<3$，方程组有无穷多解，此时

$$(\boldsymbol{A}\ \ \boldsymbol{b})\to\begin{pmatrix}1&0&1&2\\0&1&0&2\\0&0&0&1\end{pmatrix},$$

对应的方程组为

$$\begin{cases}x_1=2-3x_3\\x_2=2\end{cases},$$

因此非齐次线性方程组的一个特解 $\boldsymbol{\eta}=(2,2,0)^{\mathrm{T}}$，对应的导出组为

$$\begin{cases}x_1=-x_3\\x_2=\ 0\end{cases},$$

导出组的基础解系 $\boldsymbol{\eta}_1=(-1,0,1)^{\mathrm{T}}$，因此方程组的通解为

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\eta}+c_1\boldsymbol{\eta}_1 \qquad （c_1\text{ 为任意常数}）.$$

（3）其余情况，方程组无解.

例 4.2.20　求一个齐次线性方程组，使其通解为 $c_1\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}5\\6\\7\\8\end{pmatrix}$，其中 c_1，c_2 为任意常数.

解　设所求方程组为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$，且 $\boldsymbol{A}$ 的一个行向量为 (a_1,a_2,a_3,a_4)，则依题有

$$\begin{cases}a_1+2a_2+3a_3+4a_4=0\\5a_1+6a_2+7a_3+8a_4=0\end{cases}.$$

对此方程组的系数矩阵施以初等行变换，有

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

上述矩阵对应的方程组为

$$\begin{cases} a_1 = a_3 + 2a_4 \\ a_2 = -2a_3 - 3a_4 \end{cases},$$

基础解系为 $\boldsymbol{\eta}_1 = (1,-2,1,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\eta}_2 = (2,-3,0,1)^{\mathrm{T}}$，因此可取

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

所求齐次线性方程组为

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_4 = 0 \end{cases}.$$

例 4.2.21　设四元非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 的系数矩阵的秩为 3，试回答下列问题：

（1）若 $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\eta}_3$ 为 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 的解，并且 $\boldsymbol{\eta}_1 + \boldsymbol{\eta}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$，$2\boldsymbol{\eta}_2 + \boldsymbol{\eta}_3 = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 12 \\ 15 \end{pmatrix}$，求该方程组的通解；

（2）若 $\boldsymbol{A}$ 为 3×4 矩阵，判断向量 $\boldsymbol{b}$ 可否由 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性表示.

解　（1）依题意，方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 的导出组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系中含有 $4-3=1$ 个解向量，由于 $\boldsymbol{A}\left(\dfrac{\boldsymbol{\eta}_1 + \boldsymbol{\eta}_2}{2} - \dfrac{2\boldsymbol{\eta}_1 + \boldsymbol{\eta}_2}{3}\right) = 0$，有

$$\frac{\boldsymbol{\eta}_1 + \boldsymbol{\eta}_2}{2} - \frac{2\boldsymbol{\eta}_1 + \boldsymbol{\eta}_2}{3} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \neq 0,$$

可以作为 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系．再由 $\boldsymbol{A}\left(\dfrac{\boldsymbol{\eta}_1 + \boldsymbol{\eta}_2}{2}\right) = \boldsymbol{b}$，有

$$\frac{\boldsymbol{\eta}_1 + \boldsymbol{\eta}_2}{2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix},$$

为 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 的一个特解，故方程组的通解为

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad （c\text{ 为任意常数}）.$$

（2）由 $\boldsymbol{A}$ 为 3×4 矩阵，有 $R(\boldsymbol{A}\ \ \boldsymbol{b})=R(\boldsymbol{A})=3$，从而 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有解，故向量 $\boldsymbol{b}$ 可由 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性表示.

例 4.2.22　设矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，其中 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 都是4维向量．已知非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解为 $\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}+c_1\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$，其中 c_1 为任意常数.

（1）求 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的一个极大线性无关组，并将 $\boldsymbol{b}$ 用此极大线性无关组表示；

（2）令 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{b}+\boldsymbol{\alpha}_3)$，证明方程组 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2$ 有无穷多解，并求其通解.

解　（1）依题意，由 $\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$ 是导出组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系，有 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=2$，以及

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}=\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0},$$

易见，可选取 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的一个极大无关组，并且有 $\boldsymbol{\alpha}_1=2\boldsymbol{\alpha}_2-3\boldsymbol{\alpha}_3$．又因为 $\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的一个解，因此有

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{b},$$

故

$$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3=3\boldsymbol{\alpha}_2-4\boldsymbol{\alpha}_3 .$$

（2）方程组 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2$ 的增广矩阵为

$$(\boldsymbol{B}\ \ \boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{b}+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,3\boldsymbol{\alpha}_2-3\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2),$$

由（1）易得 $R(\boldsymbol{B}\ \ \boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2)=R(\boldsymbol{B})=2<4$，故其有无穷多解．再由

$$\boldsymbol{B}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,3\boldsymbol{\alpha}_2-3\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}=\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,$$

有 $\boldsymbol{\eta}=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}$ 为 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2$ 的解，以及

$$\boldsymbol{B}\begin{pmatrix}0\\-3\\3\\1\end{pmatrix}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,3\boldsymbol{\alpha}_2-3\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}0\\-3\\3\\1\end{pmatrix}=\boldsymbol{0},$$

$$B\begin{pmatrix}-1\\2\\-3\\0\end{pmatrix}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,3\boldsymbol{\alpha}_2-3\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}-1\\2\\-3\\0\end{pmatrix}=\mathbf{0},$$

有 $\boldsymbol{\eta}_1=\begin{pmatrix}0\\-3\\3\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\eta}_2=\begin{pmatrix}-1\\2\\-3\\0\end{pmatrix}$ 为 $\boldsymbol{Bx}=\mathbf{0}$ 的解，且它们线性无关．因为 $R(\boldsymbol{B})=2$，$\boldsymbol{Bx}=\mathbf{0}$ 的基础解系中含有 2 个解向量，所以 $\boldsymbol{B}x=\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2$ 的通解为

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\eta}+c_1\boldsymbol{\eta}_1+c_2\boldsymbol{\eta}_2 \quad （c_1、c_2 为任意常数）.$$

例 4.2.23　设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 为 $n\times k$ 矩阵，且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，求证 $R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B})\leqslant n$．

证　将矩阵 $\boldsymbol{B}$ 按列分块，记 $\boldsymbol{B}=\left(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_k\right)$，因为

$$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_k)=(\boldsymbol{A\beta}_1,\boldsymbol{A\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{A\beta}_k)=\boldsymbol{O},$$

有 $\boldsymbol{A\beta}_j=0\ (j=1,2,\cdots,k)$，即 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_k$ 是齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 的解．不妨设 $R(\boldsymbol{A})=r$，则 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_k$ 可由 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 的基础解系线性表示，所以

$$R(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_k)\leqslant n-r=R(\boldsymbol{A}),$$

故有 $R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B})\leqslant n$．

例 4.2.24　设 n 元非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有解，且系数矩阵的秩为 r，$\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_{n-r+1}$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 线性无关的解，证明：$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的任意一个解可以表示为

$$\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+k_{n-r+1}\boldsymbol{\eta}_{n-r+1},$$

其中 $k_1+k_2+\cdots+k_{n-r+1}=1$．

证　依题有 $\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_{n-r+1},\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_{n-r+1},\cdots,\boldsymbol{\eta}_{n-r}-\boldsymbol{\eta}_{n-r+1}$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的导出组 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 的解．设

$$x_1(\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_{n-r+1})+x_2(\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_{n-r+1})+\cdots+x_{n-r}(\boldsymbol{\eta}_{n-r}-\boldsymbol{\eta}_{n-r+1})=\mathbf{0},$$

整理有

$$x_1\boldsymbol{\eta}_1+x_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+x_{n-r}\boldsymbol{\eta}_{n-r}-(x_1+x_2+\cdots+x_{n-r})\boldsymbol{\eta}_{n-r+1}=\mathbf{0},$$

由于 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_{n-r+1}$ 线性无关，可得

$$x_1=x_2=\cdots=x_{n-r}=0,$$

因此 $\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_{n-r+1},\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_{n-r+1},\cdots,\boldsymbol{\eta}_{n-r}-\boldsymbol{\eta}_{n-r+1}$ 线性无关，即是导出组 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 的基础解系．进而 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解为

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\eta}_{n-r+1}+c_1(\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_{n-r+1})+c_2(\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_{n-r+1})+\cdots+c_{n-r}(\boldsymbol{\eta}_{n-r}-\boldsymbol{\eta}_{n-r+1}),$$

整理得

$$\boldsymbol{x}=c_1\boldsymbol{\eta}_1+c_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+c_{n-r}\boldsymbol{\eta}_{n-r}+[1-(c_1+c_2+\cdots+c_{n-r})]\boldsymbol{\eta}_{n-r+1}.$$

令

$$k_1=c_1,\quad k_2=c_2,\quad \cdots,\quad k_{n-r}=c_{n-r},\quad k_{n-r+1}=1-(c_1-c_2-\cdots-c_{n-r}),$$

则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的任意一个解可以表示为

$$\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+k_{n-r+1}\boldsymbol{\eta}_{n-r+1},$$

其中 $k_1+k_2+\cdots+k_{n-r+1}=1$.

例 4.2.25　知线性方程组

$$\text{I}:\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=0\\ \qquad\quad 2x_3+x_4=b\end{cases}\quad \text{II}:\begin{cases}x_1+ax_2+3x_3+2x_4=-1\\ 2x_1+2x_2\qquad\ +x_4=1\end{cases}.$$

（1）a、b 为何值时，方程组 I 与 II 有公共解？并求其公共解.

（2）a、b 为何值时，方程组 I 与 II 有相同解？并求其解.

解　（1）方程组 I 与 II 有公共解意味着方程组

$$\text{III}:\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=0\\ 2x_3+x_4=b\\ x_1+ax_2+3x_3+2x_4=-1\\ 2x_1+2x_2+x_4=1\end{cases}$$

有解．对方程组III的增广矩阵进行初等行变换，有

$$\begin{pmatrix}1&1&1&1&0\\0&0&2&1&b\\1&a&3&2&-1\\2&2&0&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1&0\\0&a-1&2&1&-1\\0&0&2&1&b\\0&0&0&0&b+1\end{pmatrix},$$

当 $b=-1$ 时，方程组III有解．此时方程组III的增广矩阵变换为

$$\begin{pmatrix}1&1&1&1&0\\0&a-1&2&1&-1\\0&0&2&1&-1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-1&0&1\\0&a-1&0&0&0\\0&0&2&1&-1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

若 $a\neq1$，上述矩阵对应的方程组为

$$\begin{cases}x_1+x_2-x_3=1\\ 2x_3+x_4=-1\\ x_2=0\end{cases},$$

其通解为

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}+c_1\begin{pmatrix}1\\0\\1\\-2\end{pmatrix},$$

其中 c_1 为任意常数．若 $a=1$，上述矩阵对应的方程组为

$$\begin{cases}x_1+x_2-x_3=1\\ 2x_3+x_4=-1\end{cases},$$

其通解为

$$x=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}+c_3\begin{pmatrix}1\\0\\1\\-2\end{pmatrix},$$

其中 c_2、c_3 为任意常数.

（2）由于方程组 I 的通解为

$$x=\begin{pmatrix}-b\\0\\0\\b\end{pmatrix}+c_1\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}1\\0\\1\\-2\end{pmatrix},$$

其中 c_1、c_2 为任意常数．将方程组 I 的解 $\begin{pmatrix}-b\\0\\0\\b\end{pmatrix}$ 代入方程组 II，可得 $b=-1$，即方程组 I 的通解为

$$x=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}+c_1\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}1\\0\\1\\-2\end{pmatrix},$$

其中 c_1、c_2 为任意常数．取 $c_1=1$，$c_2=0$ 得到方程组 I 的一个解为 $\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix}$，将此解代入方程组 II，可得 $a=1$．此时方程组 II 变为

$$\begin{cases}x_1+x_2+3x_3+2x_4=-1\\2x_1+2x_2\qquad\;\;+x_4=1\end{cases},$$

方程组的通解为

$$x=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}+c_1\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}1\\0\\1\\-2\end{pmatrix},$$

其中 c_1、c_2 为任意常数．综上，当 $a=1$，$b=-1$ 时，方程组 I 与 II 有相同解，且通解为

$$x=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}+c_1\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}1\\0\\1\\-2\end{pmatrix},$$

其中 c_1、c_2 为任意常数.

4.2.5　题型五、向量空间的相关问题

例 4.2.26　下列 n 维向量组成的集合是否构成数域 $\mathbf{R}$ 上的一个向量空间.

（1）$V_1=\left\{(a,b,\cdots,a,b)\,\middle|\,a,b\in\mathbf{R}\right\}$.

（2）$V_2=\left\{(a_1,a_2,\cdots,a_n)\,\middle|\,a_1+a_2+\cdots+a_n=1\right\}$.

解　（1）对任意常数 $k\in\mathbf{R}$，设

$$\boldsymbol{\alpha}=(a_1,\ b_1,\ \cdots,\ a_1,\ b_1)\in\boldsymbol{V}_1,\quad \boldsymbol{\beta}=(a_2,\ b_2,\ \cdots,\ a_2,\ b_2)\in\boldsymbol{V}_1,$$

由于

$$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=(a_1+a_2,\ b_1+b_2,\ \cdots,\ a_1+a_2,\ b_1+b_2)\in\boldsymbol{V}_1,$$

$$k\boldsymbol{\alpha}=(ka_1,\ kb_1,\ \cdots,\ ka_1,\ kb_1)\in\boldsymbol{V}_1,$$

因此 $\boldsymbol{V}_1$ 构成数域 $\mathbf{R}$ 上的一个向量空间.

（2）设

$$\boldsymbol{\alpha}=(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n)\in\boldsymbol{V}_2,\quad \boldsymbol{\beta}=(b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_n)\in\boldsymbol{V}_2,$$

则

$$a_1+a_2+\cdots+a_n=1,\quad b_1+b_2+\cdots+b_n=1,$$

而

$$(a_1+b_1)+(a_2+b_2)+\cdots+(a_n+b_n)=1+1=2\neq1,$$

即 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\notin\boldsymbol{V}_2$，因此 $\boldsymbol{V}_2$ 不构成数域 $\mathbf{R}$ 上的一个向量空间.

例 4.2.27　设向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,\ 1,\ 1,\ 1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,\ 1,-1,-1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,-1,\ 1,-1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(1,-1,-1,\ 1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}=(1,\ 2,\ 1,\ 1)^{\mathrm{T}}$.

（1）验证 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 是向量空间 $\boldsymbol{R}^4$ 的一个基.

（2）求向量 $\boldsymbol{\beta}$ 关于基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的坐标.

解　（1）由于 $R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=4$，故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 为 $\boldsymbol{R}^4$ 的一个基.

（2）设 $\boldsymbol{\beta}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3+x_4\boldsymbol{\alpha}_4$，即

$$\begin{pmatrix}1\\2\\1\\1\end{pmatrix}=x_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}+x_4\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix},$$

由此得方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=1\\x_1+x_2-x_3-x_4=2\\x_1-x_2+x_3-x_4=1\\x_1-x_2-x_3+x_4=1\end{cases},$$

解方程组得

$$x_1=\frac{5}{4},x_2=\frac{1}{4},x_3=x_4=-\frac{1}{4},$$

故 $\boldsymbol{\beta}$ 关于基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的坐标为 $\frac{5}{4},\frac{1}{4},-\frac{1}{4},-\frac{1}{4}$.

例 4.2.28　设 $\boldsymbol{R}^3$ 中的两个基为：

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,\ 1,\ 1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(1,\ 1,-1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(1,-1,-1)^{\mathrm{T}};$$

$$\boldsymbol{\beta}_1=(1,\ 3,\ 5)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_2=(6,\ 3,\ 2)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_3=(3,\ 1,\ 0)^{\mathrm{T}}.$$

向量 $\boldsymbol{\alpha}=(1,\ 2,\ 1)^{\mathrm{T}}$，试求：

（1）基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 到基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 的过渡矩阵 $\boldsymbol{P}$；

（2）向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 关于这两个基的坐标.

解　（1）令

$$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\ \boldsymbol{\beta}_2,\ \boldsymbol{\beta}_3)=\begin{pmatrix}1&6&3\\3&3&1\\5&2&0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_3)=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&-1\\1&-1&-1\end{pmatrix},$$

则有

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&-1\\1&-1&0\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{P}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}6&8&3\\-2&1&1\\-2&3&2\end{pmatrix}.$$

（2）设 $\boldsymbol{\alpha}=y_1\boldsymbol{\beta}_1+y_2\boldsymbol{\beta}_2+y_3\boldsymbol{\beta}_3$，即

$$\begin{cases}y_1+6y_2+3y_3=1\\3y_1+3y_2+y_3=2\\5y_1+2y_2=1\end{cases},$$

解方程组得 $y_1=7,\ y_2=-17,\ y_3=32$，因此 $\boldsymbol{\alpha}$ 关于基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 的坐标为 $7,-17,32$. 再设 $\boldsymbol{\alpha}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3$，根据坐标变换公式，有

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1/2\\-1/2\end{pmatrix},$$

因此 $\boldsymbol{\alpha}$ 关于基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的坐标为 $1,\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}$.

4.3　深 化 训 练

4.3.1　填空题

（1）向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,\ 2,\ 3,\ 4)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(5,\ 6,\ 7,\ 8)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(7,\ 10,\ t,\ 16)^{\mathrm{T}}$ 线性相关，则 $t=$________.

（2）设向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关，$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\beta}$ 线性相关，则 $\boldsymbol{\beta}$ 可用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表示为________.

（3）设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，令 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\beta}_3=2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，则向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 的秩 $R(\boldsymbol{\beta}_1,\ \boldsymbol{\beta}_2,\ \boldsymbol{\beta}_3)=$________.

（4）若向量组 A 可由向量组 B 线性表示，则 $R(A)$________$R(B)$（填≥、=或≤）.

（5）设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&1\\0&t&1\\2&2&0\\1&3&2\end{pmatrix}$，列向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关．若 $R\left(A\boldsymbol{\alpha}_1,A\boldsymbol{\alpha}_2,A\boldsymbol{\alpha}_3\right)<3$，则 t 满足的关系是________．

（6）【2005（3）】设行向量组 $(2,1,1,1),(2,1,a,a),(3,2,1,a),(4,3,2,1)$ 线性相关，且 $a\neq1$，则 $a=$________．

（7）方程组 $x_1+x_2+x_3+x_4=0$ 的基础解系是________．

（8）设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的各行元素之和均等于零，且 $R(\boldsymbol{A})=n-1$，则齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的通解为________．

（9）方程组 $\begin{pmatrix}a&1&1\\1&a&1\\1&1&a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ 的基础解系含有 2 个解向量，则 $a=$________．

（10）已知线性方程组 $\begin{pmatrix}1&2&1\\2&3&a+2\\1&a&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}$ 无解，则 $a=$________．

（11）设 $\boldsymbol{A}$ 是 3×4 矩阵，其秩为 3，若 $\boldsymbol{\eta}_1$、$\boldsymbol{\eta}_2$ 为非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的两个不同的解，则此方程组的通解是________．

（12）设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&4&3\\2&5&3\\3&6&3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，则 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的通解为________．

（13）设齐次线性方程组 $\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=0\\x_1+\lambda x_2+x_3=0\\x_1+x_2+x_3=0\end{cases}$ 的系数矩阵为 $\boldsymbol{A}$，若存在非零矩阵 $\boldsymbol{B}$，使得 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，则 $\lambda=$________，$|\boldsymbol{B}|=$________．

（14）若 $\boldsymbol{\alpha}_1=(-1,\ 1,\ a)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,\ 1,\ 5)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,\ 2,\ 1)^{\mathrm{T}}$ 为齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系，则 a 的取值范围为________．

（15）写出一个以 $x=c_1\begin{pmatrix}2\\-3\\1\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}-2\\4\\0\\1\end{pmatrix}$ 为通解的齐次线性方程组________．

（16）已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&7\\3&6&9\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}$ 为三阶非零矩阵，且满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，则 $R(\boldsymbol{B})=$________．

（17）设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&-2\\4&t&3\\3&-1&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}$ 为三阶非零矩阵，且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，则 $t=$________．

（18）设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是 $s\times m$ 矩阵，且 $R(\boldsymbol{A})=r$，$R(\boldsymbol{B})=m$，则齐次线性方程组

$\boldsymbol{BAx}=\mathbf{0}$ 的基础解系中含有线性无关的解向量的个数为________.

（19）n 元非齐次线性方程组系数矩阵的秩为 r，当此方程组有解时，解向量组中最多有________个解向量线性无关.

（20）n 维向量空间的子空间 $W=\left\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\middle|\begin{cases}x_1+x_2+\cdots+x_n=0\\ \quad x_2+\cdots+x_n=0\end{cases}\right\}$ 的维数是________.

（21）设 $\boldsymbol{A}$ 是 4×5 的矩阵，且 $R(\boldsymbol{A})=2$，　则齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 的解空间的维数是________.

（22）设 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 为线性空间 $\boldsymbol{V}$ 的一组基，则从基 $\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_1$ 到基 $\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 的过渡矩阵为________.

（23）【2010（1）】设 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,-1,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,0,2)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,1,1,a)^{\mathrm{T}}$，若由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 生成的向量空间的维数是 2，则 $a=$________.

4.3.2　单项选择题

（1）【2015（1，3）】设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&a\\1&4&a^2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}1\\d\\d^2\end{pmatrix}$，若集合 $\Omega=\{1,2\}$，则线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解的充分必要条件为（　　）.

（A）$a\notin\Omega,d\notin\Omega$；　　（B）$a\notin\Omega,d\in\Omega$；

（C）$a\in\Omega,d\notin\Omega$；　　（D）$a\in\Omega,d\in\Omega$.

（2）设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，$\boldsymbol{\alpha}$ 是 n 维列向量，若 $R\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{\alpha}\\\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}&0\end{pmatrix}=R(\boldsymbol{A})$，则（　　）.

（A）$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\alpha}$ 必有无穷多解；　　（B）$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\alpha}$ 必有唯一解；

（C）$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{\alpha}\\\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}\\\boldsymbol{y}\end{pmatrix}=\mathbf{0}$ 仅有零解；　　（D）$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{\alpha}\\\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}\\\boldsymbol{y}\end{pmatrix}=\mathbf{0}$ 必有非零解.

（3）设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，下列命题正确的是（　　）.

（A）若 $R(\boldsymbol{A})=m$，则齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 只有零解；

（B）若 $m<n$，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 必有无穷多解；

（C）若 $m\geqslant n$，非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 要么有解，要么有唯一解，两者必居其一；

（D）以上命题都不对.

（4）【2011（3）】设 $\boldsymbol{A}$ 是 4×3 的矩阵，$\boldsymbol{\beta}_1,\ \boldsymbol{\beta}_2,\ \boldsymbol{\beta}_3$ 是非齐次方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的三个线性无关的解，则设 $k_1,\ k_2$ 为任意实数，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解为（　　）.

（A）$\dfrac{\boldsymbol{\beta}_2+\boldsymbol{\beta}_3}{2}+k_1(\boldsymbol{\beta}_2-\boldsymbol{\beta}_1)$；　　（B）$\dfrac{\boldsymbol{\beta}_2-\boldsymbol{\beta}_3}{2}+k_1(\boldsymbol{\beta}_2-\boldsymbol{\beta}_1)$；

（C）$\dfrac{\boldsymbol{\beta}_2+\boldsymbol{\beta}_3}{2}+k_1(\boldsymbol{\beta}_2-\boldsymbol{\beta}_1)+k_2(\boldsymbol{\beta}_3-\boldsymbol{\beta}_1)$；　　（D）$\dfrac{\boldsymbol{\beta}_2-\boldsymbol{\beta}_3}{2}+k_1(\boldsymbol{\beta}_2-\boldsymbol{\beta}_1)+k_2(\boldsymbol{\beta}_3-\boldsymbol{\beta}_1)$.

（5）【2007（1，3）】若向量组 $\boldsymbol{\alpha},\ \boldsymbol{\beta},\ \boldsymbol{\gamma}$ 线性无关，则下列向量组线性相关的是（　　）.

（A）$\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta},\ \boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\gamma},\ \boldsymbol{\gamma}-\boldsymbol{\alpha}$；　　（B）$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},\ \boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma},\ \boldsymbol{\gamma}+\boldsymbol{\alpha}$；

（C）$\boldsymbol{\alpha}-2\boldsymbol{\beta},\ \boldsymbol{\beta}-2\boldsymbol{\gamma},\ \boldsymbol{\gamma}-2\boldsymbol{\alpha}$；　　（D）$\boldsymbol{\alpha}+2\boldsymbol{\beta},\ \boldsymbol{\beta}+2\boldsymbol{\gamma},\ \boldsymbol{\gamma}+2\boldsymbol{\alpha}$.

（6）【2006（1，2，3）】设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{\alpha}_s$ 均为 n 维列向量，$\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，下列选项正确的是（　　）.

（A）若 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关，则 $\boldsymbol{A\alpha}_1, \boldsymbol{A\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{A\alpha}_s$ 线性相关；

（B）若 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关，则 $\boldsymbol{A\alpha}_1, \boldsymbol{A\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{A\alpha}_s$ 线性无关；

（C）若 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关，则 $\boldsymbol{A\alpha}_1, \boldsymbol{A\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{A\alpha}_s$ 线性相关；

（D）若 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关，则 $\boldsymbol{A\alpha}_1, \boldsymbol{A\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{A\alpha}_s$ 线性无关.

（7）【2004（1，2）】设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 、$\boldsymbol{B}$ 为满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$ 的任意两个非零矩阵，则必有（　　）.

（A） $\boldsymbol{A}$ 的列向量线性相关， $\boldsymbol{B}$ 的行向量线性相关；

（B） $\boldsymbol{A}$ 的列向量线性相关， $\boldsymbol{B}$ 的列向量线性相关；

（C） $\boldsymbol{A}$ 的行向量线性相关， $\boldsymbol{B}$ 的行向量线性相关；

（D） $\boldsymbol{A}$ 的行向量线性相关， $\boldsymbol{B}$ 的列向量线性相关.

（8）【2013（2）】设 $\boldsymbol{A}$ 、$\boldsymbol{B}$ 、$\boldsymbol{C}$ 均为 n 阶矩阵，若有 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{C}$ ，且 $\boldsymbol{B}$ 可逆，则（　　）正确.

（A）矩阵的 $\boldsymbol{C}$ 行向量组与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组等价；

（B）矩阵的 $\boldsymbol{C}$ 列向量组与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组等价；

（C）矩阵的 $\boldsymbol{C}$ 行向量组与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的行向量组等价；

（D）矩阵的 $\boldsymbol{C}$ 列向量组与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组等价.

（9）【2010（3）】设向量组Ⅰ：$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 可由向量组Ⅱ：$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$ 线性表示．则下列命题正确的是（　　）.

（A）若向量组Ⅰ线性无关，则 $r \leqslant s$ ；　　（B）若向量组Ⅰ线性相关，则 $r > s$ ；

（C）若向量组Ⅱ线性无关，则 $r \leqslant s$ ；　　（D）若向量组Ⅱ线性相关，则 $r > s$.

（10）设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m \times n$ 矩阵， $\boldsymbol{A}$ 的秩为 r ，则齐次线性方程 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的所有解构成一个向量空间，其维数是（　　）.

（A） $n-r$ ；　　（B） $m-r$ ；　　（C） r ；　　（D）无法确定.

（11）设向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示，但不能由向量组（I）：$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{m-1}$ 线性表示，记向量组（II）：$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{m-1}, \boldsymbol{\beta}$ ，则下列结论正确的是（　　）.

（A） $\boldsymbol{\alpha}_m$ 不能由（I）线性表示，也不能由（II）线性表示；

（B） $\boldsymbol{\alpha}_m$ 不能由（I）线性表示，但可由（II）线性表示；

（C） $\boldsymbol{\alpha}_m$ 可由（I）线性表示，也可由（II）线性表示；

（D） $\boldsymbol{\alpha}_m$ 可由（I）线性表示，但不能由（II）线性表示.

（12）【2012（1，3）】设向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}0\\0\\c_1\end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\c_2\end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\c_3\end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}-1\\1\\c_4\end{pmatrix},$$

其中 c_1, c_2, c_3, c_4 为任意常数，则下列向量组线性相关的是（　　）.

（A） $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ ；　（B） $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_4$ ；　（C） $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ ；　（D） $\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$.

（13） $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵， $R(\boldsymbol{A})=r<n$ ，那么 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个列向量中（　　）.

（A）任意 r 个列向量线性无关；

（B）必有某 r 个列向量线性无关；

（C）任意 r 个列向量都构成一个极大无关组；

（D）任意一个列向量可由其余的 $n-1$ 个向量线性表示.

（14）若 $m\times n$ 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个列向量线性无关，则下列结论一定成立的是（　　）.

（A）$R(\boldsymbol{A})>m$；（B）$R(\boldsymbol{A})<m$；（C）$R(\boldsymbol{A})=m$；（D）$R(\boldsymbol{A})=n$.

（15）设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n\times m$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 为 $m\times n$ 矩阵，且 $m>n$．若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$，则必有（　　）.

（A）矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的行向量组线性无关；

（B）矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组线性无关；

（C）矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组线性无关，$\boldsymbol{B}$ 的列向量组线性无关；

（D）矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列向量组线性无关，$\boldsymbol{B}$ 的行向量组线性无关.

（16）非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有解的充分条件是（　　）.

（A）向量 $\boldsymbol{b}$ 可由 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组线性表示；

（B）向量 $\boldsymbol{b}$ 可由 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性表示；

（C）$\boldsymbol{A}$ 的行向量组线性无关；

（D）$\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性无关.

（17）设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_3,\ \boldsymbol{\alpha}_4)$，已知 $\boldsymbol{\beta}_1=(1,1,1,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_2=(1,0,1,0)^{\mathrm{T}}$ 是齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解，则（　　）正确.

（A）$\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_3$ 必线性无关；（B）$\boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_4$ 必线性无关；

（C）$\boldsymbol{\alpha}_1$ 必可由 $\boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_4$ 线性表示；（D）$\boldsymbol{\alpha}_4$ 必可由 $\boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

（18）下列集合中是向量空间的是（　　）.

（A）$\boldsymbol{V}_1=\left\{\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\,\middle|\,x_1x_2\cdots x_n=0, x_i\in\mathrm{R}, i=1,2,\cdots,n\right\}$；

（B）$\boldsymbol{V}_2=\left\{\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,0)^{\mathrm{T}}\,\middle|\,x_1,x_2\in\mathrm{R}\right\}$；

（C）$\boldsymbol{V}_3=\{\boldsymbol{x}\,|\,\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0},\ \boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵$\}$；

（D）$\boldsymbol{V}_4=\left\{\boldsymbol{x}=(1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\,\middle|\,x_2,\cdots,x_n\in\mathrm{R}\right\}$.

4.3.3　设 $\boldsymbol{\beta}=(4,4,1,2)$，$\boldsymbol{\alpha}_1=(-1,0,1,0)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,-1,0,5)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(-4,-2,3,0)$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(0,-1,2,5)$，判断 $\boldsymbol{\beta}$ 是否可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性表示？

4.3.4　设 $\boldsymbol{\alpha}_1=(-1,\lambda,2)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(0,2,1)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,-1,\lambda)$，$\boldsymbol{\beta}=(\lambda,1,\lambda^2)$，$\lambda$ 为何值时，$\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示？并写出其表达式.

4.3.5　向量组Ⅰ：$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\4\\4\\2\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}3\\8\\10\\4\end{pmatrix}$，Ⅱ：$\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}2\\2\\5\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}1\\6\\5\\3\end{pmatrix}$，判断Ⅱ可否由Ⅰ线性表示.

4.3.6　讨论参数 t，回答 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,3,2)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,3,5,t)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(0,1,2,2)$ 的相关性.

4.3.7　假设向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示．证明：表示方法唯一的充分必要条件是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关.

4.3.8　假设向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关，且 $\boldsymbol{\beta}_j=\boldsymbol{\alpha}_j+\boldsymbol{\alpha}_{j+1}\,(j=1,2,\cdots,m-1)$，$\boldsymbol{\beta}_m=\boldsymbol{\alpha}_m+\boldsymbol{\alpha}_1$，讨论 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 的线性相关性.

4.3.9　$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 是 n 维单位向量组，$\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵，求证：$\boldsymbol{A}$ 可逆的充分必要条件是 $\boldsymbol{A\varepsilon}_1,\boldsymbol{A\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{A\varepsilon}_n$ 线性无关.

4.3.10　设 $\boldsymbol{A}$ 三阶方阵，若非零向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{0}$， $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_1$， $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_1$，试证：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

4.3.11　给定向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,2,4)^{\mathrm{T}}$， $\boldsymbol{\alpha}_2=(0,3,1,2)^{\mathrm{T}}$， $\boldsymbol{\alpha}_3=(3,0,7,14)^{\mathrm{T}}$， $\boldsymbol{\alpha}_4=(1,-2,2,0)^{\mathrm{T}}$， $\boldsymbol{\alpha}_5=(2,1,5,10)^{\mathrm{T}}$，求：

（1）向量组的秩；（2）向量组的一个极大无关组，并将其余的向量用其线性表示.

4.3.12　已知两个向量组的秩相同，且其中一个可由另外一个线性表示. 证明：这两个向量组等价.

4.3.13　设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的秩为 r，在其中任取 m 个向量 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_m}$，则此向量组的秩 $\geqslant r+m-s$.

4.3.14　求线性方程组 $\begin{cases}x_1+2x_2+2x_3+x_4=0\\2x_1+x_2-2x_3-2x_4=0\\x_1-x_2-4x_3-3x_4=0\end{cases}$ 的通解.

4.3.15　求线性方程组 $\begin{cases}x_1+\ x_2-2x_3+3x_4=0\\2x_1+\ x_2-6x_3+4x_4=-1\\3x_1+2x_2-8x_3+7x_4=-1\end{cases}$ 的通解.

4.3.16　讨论 λ 为何值时，线性方程组 $\begin{cases}x_1+(1+\lambda)x_2+x_3=3\\(1+\lambda)x_1+x_2+x_3=0\\x_1+x_2+(1+\lambda)x_3=\lambda\end{cases}$ 有唯一解、无解、有无穷解？并在有无穷解时，求其通解.

4.3.17　讨论当 a、b 取何值时，线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=1\\3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5=a\\x_2+2x_3+2x_4+6x_5=3\\5x_1+5x_2+5x_3+5x_4+x_5=b\end{cases}$ 有解？并在有解时先求出对应的齐次方程组的基础解系，再求出非齐次方程组的通解.

4.3.18　设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&1&2\\0&1&t&t\\1&t&0&1\end{pmatrix}$，且齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 解空间的维数是 2，求 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的通解.

4.3.19　矩阵 $\boldsymbol{A}$ 按列分块记为 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$，其中 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关， $\boldsymbol{\alpha}_1=2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$，若向量 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4$，求方程 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解.

4.3.20　设 $\boldsymbol{A}$ 是秩为 3 的 5×4 矩阵， $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的三个不同的解，若

$$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}2\\0\\0\\0\end{pmatrix},\ 3\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}2\\4\\6\\8\end{pmatrix},$$

求方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解.

4.3.21　求一个非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$，使它的通解为 $\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}+c_1\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$，其中 c_1、c_2 为任意实数.

4.3.22　设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&1&1&2\\0&1&3&1\\1&\lambda&\mu&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$，若 $\boldsymbol{\eta}=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的一个解，求该方程组的通解.

4.3.23　给定向量组

$$\text{I}:\ \boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\0\\-2\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}2\\1\\-1\\-4\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}0\\6\\2\\a-2\end{pmatrix}\quad \text{II}:\ \boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}1\\8\\2\\-2\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}0\\3\\1\\a-2\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_3=\begin{pmatrix}-4\\7\\t+1\\10-a\end{pmatrix}.$$

已知 I 是方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系，问当 t 取何值时，II 也是方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 基础解系.

4.3.24　设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶方阵，满足 $\boldsymbol{ABA}=\boldsymbol{B}^{-1}$，证明：$R(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{AB})+R(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{AB})=n$.

4.3.25　设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系. 证明：$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\beta}_2=2\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\beta}_3=3\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$ 也是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系.

4.3.26　设 $\boldsymbol{\eta}$ 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的一个解，$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 是对应齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系，证明：

（1）$\boldsymbol{\eta},\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 线性无关；　（2）$\xi_1+\boldsymbol{\eta},\xi_2+\boldsymbol{\eta},\cdots,\xi_{n-r}+\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\eta}$ 线性无关.

4.3.27　若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 r，且其 r 个列向量为某个齐次线性方程组的基础解系，$\boldsymbol{B}$ 为 r 阶可逆矩阵. 证明：$\boldsymbol{AB}$ 的 r 个列向量也为该齐次线性方程组的基础解系.

4.3.28　设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ $(m<n)$ 矩阵，且 $\boldsymbol{A}$ 的行向量线性无关. $\boldsymbol{B}$ 是 $n\times(n-m)$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 的列向量线性无关，且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$. 证明：若 $\boldsymbol{\eta}$ 是齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解，则 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{\eta}$ 有唯一解.

4.3.29　已知线性方程组

$$\text{I}:\ \begin{cases}2x_1+2x_2+2x_3-x_4=0\\ x_1\qquad\quad -x_3+ax_4=0\end{cases}\quad \text{II}:\ \begin{cases}x_1+3x_2+2x_3+x_4=0\\3x_1+2x_2+x_3-x_4=0\\3x_1+3x_2\qquad +bx_4=0\end{cases}.$$

问 a、b 为何值时，方程组 I 与 II 有非零公共解，并求其公共解.

4.3.30　设 $\boldsymbol{R}^3$ 的两个基分别为：

$$\text{I}:\ \boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix};\quad \text{II}:\ \boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

（1）求由基 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 到 $\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，$\boldsymbol{\beta}_3$ 的过渡矩阵 $\boldsymbol{P}$；

（2）已知向量 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，求向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 $\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，$\boldsymbol{\beta}_3$ 下的坐标.

4.3.31　设 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 为 $\boldsymbol{R}^3$ 的一个基，已知

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2-2\boldsymbol{\beta}_3,\quad \boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2-\boldsymbol{\beta}_3,\quad \boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_3.$$

证明：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 为 $\boldsymbol{R}^3$ 的一个基，并求向量 $\boldsymbol{\eta}=6\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2-\boldsymbol{\beta}_3$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 下的坐标.

4.3.32　设 $\boldsymbol{R}^3$ 的一个基 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$，向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 下的坐标为 x_1,x_2,x_3，在另一组基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 下的坐标为 y_1,y_2,y_3，且有 $y_1=x_1-x_2+x_3$，$y_2=-x_1+x_2$，$y_3=x_1+2x_3$.

（1）求基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 到 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的过渡矩阵 $\boldsymbol{P}$；（2）求基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$.

4.4　深化训练详解

4.3.1　填空题

（1）$t=13$.

（2）$\boldsymbol{\beta}=\dfrac{k}{k+l}\boldsymbol{\alpha}_1+\dfrac{l}{k+l}\boldsymbol{\alpha}_2$. **提示**　由于 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\beta}$ 线性相关，因此存在 k,l 使得

$$k(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\beta})+l(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{0}.$$

又由于 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关，因此 $k+l\neq 0$，因此 $\boldsymbol{\beta}=\dfrac{k}{k+l}\boldsymbol{\alpha}_1+\dfrac{l}{k+l}\boldsymbol{\alpha}_2$.

（3）$R(\boldsymbol{\beta}_1,\ \boldsymbol{\beta}_2,\ \boldsymbol{\beta}_3)=3$. **提示**　由于

$$(\boldsymbol{\beta}_1\quad\boldsymbol{\beta}_2\quad\boldsymbol{\beta}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1\quad\boldsymbol{\alpha}_2\quad\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}1&1&2\\1&-1&1\\1&1&1\end{pmatrix},$$

而 $\begin{vmatrix}1&1&2\\1&-1&1\\1&1&1\end{vmatrix}\neq 0$，故向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 与向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 等价，从而 $R(\boldsymbol{\beta}_1,\ \boldsymbol{\beta}_2,\ \boldsymbol{\beta}_3)=3$.

（4）$\leqslant$. **提示**　向量组 $\boldsymbol{A}$ 的极大无关组可由向量组 $\boldsymbol{B}$ 的极大无关组线性表示.

（5）$t=1$. **提示**　$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3)=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，由于 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，因此

$$R(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3)=R(\boldsymbol{A})<3,$$

而

$$\boldsymbol{A}\to\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&1\\0&t-1&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

故 $t=1$.

（6）$\dfrac{1}{2}$. **提示**　$\begin{vmatrix}2&1&1&1\\2&1&a&a\\3&2&1&a\\4&3&2&1\end{vmatrix}=-(a-1)(2a-1)=0$，因此 $a=\dfrac{1}{2}$.

（7）$c_1\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix}+c_3\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$ （c_1,c_2,c_3 为任意常数）.

（8）$c(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$ （c 为任意常数）.

（9）1. **提示** 齐次线性方程组有非零解，因此$\begin{vmatrix}a&1&1\\1&a&1\\1&1&a\end{vmatrix}=0$，故 $a=1,-2$．当 $a=-2$ 时，系数矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-2&1&1\\1&-2&1\\1&1&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2&1\\0&-1&1\\0&0&0\end{pmatrix},$$

此时 $R(\boldsymbol{A})=2$，故基础解系含有 1 个解向量，与已知不符；当 $a=1$ 时，系数矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

此时 $R(\boldsymbol{A})=1$，故基础解系含有 2 个解向量，与已知相符.

（10）$a=-1$. **提示** 由于

$$\begin{pmatrix}1&2&1&1\\2&3&a+2&3\\1&a&-2&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&1&1\\0&-1&a&1\\0&0&(a-3)(a+1)&a-3\end{pmatrix},$$

因此 $a=-1$.

（11）$\boldsymbol{\eta}_1+c_1(\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2)$（$c_1$ 为任意常数）. **提示** 由于 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 3，$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 对应的导出组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系中只含有一个解向量，即为 $\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2$，因此 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解是 $\boldsymbol{\eta}_1+c_1(\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2)$（$c_1$ 为任意常数）.

（12）$c_1\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}$（$c_1,c_2$ 为任意常数）. **提示** 由题意 $|\boldsymbol{A}|=0$，因此 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$，故 $\boldsymbol{A}$ 的列向量为 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解，而 $\boldsymbol{A}$ 的前两个列向量线性无关，故它们构成 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系.

（13）$\lambda=0$ 或 1，$|\boldsymbol{B}|=0$. **提示** 由已知有 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 存在非零解，故 $|\boldsymbol{A}|=0$，即 $\begin{vmatrix}\lambda&1&\lambda^2\\1&\lambda&1\\1&1&1\end{vmatrix}=0$，故 $\lambda=0$ 或 1；由于 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，且 $R(\boldsymbol{A})\geqslant1$，因此 $R(\boldsymbol{B})\leqslant3-R(\boldsymbol{A})\leqslant2$，故 $|\boldsymbol{B}|=0$.

（14）$a\neq-4$. **提示** $|\boldsymbol{\alpha}_1\quad\boldsymbol{\alpha}_2\quad\boldsymbol{\alpha}_3|=\begin{vmatrix}-1&2&1\\1&1&2\\a&5&1\end{vmatrix}\neq0$.

（15）$\begin{cases} x_1 - 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 0 \end{cases}$.

（16）1．**提示**　$R(\boldsymbol{A}) = 2$，由 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{O}$，有 $R(\boldsymbol{B}) \leqslant 3 - R(\boldsymbol{A}) = 1$，$\boldsymbol{B}$ 为非零矩阵，故 $R(\boldsymbol{B}) = 1$.

（17）-3．**提示**　由 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{O}$，有 $R(\boldsymbol{A}) + R(\boldsymbol{B}) \leqslant 3$，而 $\boldsymbol{B}$ 为三阶非零矩阵，因此 $R(\boldsymbol{A}) \leqslant 2$，即 $|\boldsymbol{A}| = 0$，从而 $t = -3$.

（18）$n - r$．**提示**　由 $R(\boldsymbol{B}) = m$ 知，$R(\boldsymbol{BA}) = R(\boldsymbol{A}) = r$，因此 $\boldsymbol{BAx} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系中包含 $n - r$ 个线性无关的解向量.

（19）$n - r + 1$.

（20）$n - 2$.

（21）3.

（22）$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

（23）6．**提示**　$(\boldsymbol{\alpha}_1\ \ \boldsymbol{\alpha}_2\ \ \boldsymbol{\alpha}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & a \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & a-6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，故 $a = 6$.

4.3.2　单项选择题

（1）（D）．**提示**　$(\boldsymbol{A}\ \ \boldsymbol{b}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a & d \\ 1 & 4 & a^2 & d^2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a-1 & d-1 \\ 0 & 0 & a^2-3a+2 & d^2-3d+2 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 有无穷多解 $\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 3a + 2 = 0 \\ d^2 - 3d + 2 = 0 \end{cases}$，即 $\begin{cases} a = 1,\ 2 \\ d = 1,\ 2 \end{cases}$，故（D）正确.

（2）（D）．（3）（D）．

（4）（C）．**提示**　由于 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 有三个线性无关的解向量，因此对应的导出组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系中含有两个解向量，故（C）正确.

（5）（A）．**提示**　$(\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta}) + (\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\gamma}) + (\boldsymbol{\gamma} - \boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{0}$，因此 $\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta},\ \boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\gamma},\ \boldsymbol{\gamma} - \boldsymbol{\alpha}$ 线性相关．故（A）正确.

（6）（A）．

（7）（A）．**提示**　取 $\boldsymbol{A} = (1\ \ 0)$，$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，有 $\boldsymbol{AB} = 0$，并且 $\boldsymbol{A}$ 的列向量线性相关，$\boldsymbol{A}$ 的行向量线性无关；$\boldsymbol{B}$ 的行向量线性相关，$\boldsymbol{B}$ 的列向量线性无关．故（A）正确.

（8）（B）．**提示**　设 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)$，$\boldsymbol{C} = (\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \cdots, \boldsymbol{c}_n)$，由 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{C}$ 有

$$(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} = (\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \cdots, \boldsymbol{c}_n),$$

因此

$$\boldsymbol{c}_1 = b_{11}\boldsymbol{\alpha}_1 + b_{21}\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + b_{n1}\boldsymbol{\alpha}_n, \quad \cdots, \quad \boldsymbol{c}_n = b_{1n}\boldsymbol{\alpha}_1 + b_{2n}\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + b_{nn}\boldsymbol{\alpha}_n,$$

即 $\boldsymbol{C}$ 列向量组可由 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性表示；由于 $\boldsymbol{B}$ 可逆，因此 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}^{-1}$，因此 $\boldsymbol{A}$ 列向量组可由 $\boldsymbol{C}$ 的列向量组线性表示．因此 $\boldsymbol{C}$ 列向量组与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组等价．　故（B）正确．

（9）（A）．（10）（A）．

（11）（B）．**提示**　因为 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示，则

$$\boldsymbol{\beta} = k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_m\boldsymbol{\alpha}_m,$$

这里 $k_m \neq 0$（否则与条件矛盾），则 α_m 可由（II）线性表示；

假设 $\boldsymbol{\alpha}_m$ 可由（I）线性表示，即 $\alpha_m = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_{m-1}\alpha_{m-1}$，又因为 $\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m$，将 $\alpha_m = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_{m-1}\alpha_{m-1}$ 代入到 β 中，即有

$$\boldsymbol{\beta} = (x_1 + k_1)\boldsymbol{\alpha}_1 + (x_2 + k_2)\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + (x_{m-1} + k_{m-1})\boldsymbol{\alpha}_{m-1},$$

可知 β 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{m-1}$ 线性表示，与题设矛盾，因此 α_m 不能由（I）线性表示．

（12）（C）．**提示**　　由于

$$\left|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4\right| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ c_1 & c_3 & c_4 \end{vmatrix} = 0,$$

故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关．

（13）（B）．

（14）（D）．**提示**　$n \leqslant R(\boldsymbol{A}) \leqslant \min\{m,n\} \leqslant n$．

（15）（C）．**提示**　由于

$$n = R(\boldsymbol{E}) = R(\boldsymbol{AB}) \leqslant \min\{R(\boldsymbol{A}), R(\boldsymbol{B})\} \leqslant \min\{m,n\} = n,$$

有 $R(\boldsymbol{A}) = n, R(\boldsymbol{B}) = n$，故矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组线性无关，$\boldsymbol{B}$ 的列向量组线性无关，即（C）正确．

（16）（B）．　（17）（D）．　（18）（B）．

4.3.3　利用矩阵的初等行变换，有

$$(\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_4^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & 5 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -5 & 0 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

可得 $R(\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_4^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}) \neq R(\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_4^{\mathrm{T}})$，因此 $\boldsymbol{\beta}$ 不可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性表示．

4.3.4　利用矩阵的初等行变换，有

$$(\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}) \to \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & \lambda \\ 0 & 2 & -1+\lambda & 1+\lambda^2 \\ 0 & 1 & \lambda+2 & \lambda^2+2\lambda \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & \lambda \\ 0 & 1 & 2+\lambda & \lambda^2+2\lambda \\ 0 & 0 & -\lambda-5 & -\lambda^2-4\lambda+1 \end{pmatrix},$$

当 $\lambda \neq -5$ 时，$\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示．　且

$$\boldsymbol{\beta} = -\frac{\lambda+1}{\lambda+5}\boldsymbol{\alpha}_1 + \frac{(\lambda+1)(\lambda+2)}{\lambda+5}\boldsymbol{\alpha}_2 + \frac{\lambda^2+4\lambda-1}{\lambda+5}\boldsymbol{\alpha}_3.$$

4.3.5　利用矩阵的初等行变换，有

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2)\to\begin{pmatrix}1&1&3&2&1\\0&1&1&-1&2\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&2&3&-1\\0&1&1&-1&2\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix},$$

由于$R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_i)=R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，$i=1,2$，因此II可由 I 线性表示，并且

$$\boldsymbol{\beta}_1=3\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_2=-\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2.$$

4.3.6　利用矩阵的初等行变换，有

$$\left(\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm{T}}\right)=\begin{pmatrix}1&1&0\\2&3&1\\3&5&2\\2&t&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&2&2\\0&t-2&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&0\\0&0&t-4\end{pmatrix},$$

当$t\neq 4$时，$R(\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm{T}})=3$，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关；

当$t=4$时，$R(\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm{T}})=2<3$，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性相关，且$\boldsymbol{\alpha}_3=-\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$.

4.3.7　$\boldsymbol{\beta}$可由向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性表示，故存在$k_1,k_2,\cdots,k_m$使得

$$\boldsymbol{\beta}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m.$$

$\Rightarrow$设存在$l_1,l_2,\cdots,l_m$使得

$$l_1\boldsymbol{\alpha}_1+l_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+l_m\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0},$$

因此

$$\boldsymbol{\beta}=(k_1+l_1)\boldsymbol{\alpha}_1+(k_2+l_2)\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+(k_m+l_m)\boldsymbol{\alpha}_m,$$

由于$\boldsymbol{\beta}$可由向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$唯一线性表示，所以

$$k_1=k_1+l_1,k_2=k_2+l_2,\cdots,k_m=k_m+l_m$$

故$l_1=l_2=\cdots=l_m=0$，因此$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性无关；

$\Leftarrow$设$\boldsymbol{\beta}=l_1\boldsymbol{\alpha}_1+l_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+l_m\boldsymbol{\alpha}_m$，因此

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=l_1\boldsymbol{\alpha}_1+l_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+l_m\boldsymbol{\alpha}_m,$$

即

$$(k_1-l_1)\boldsymbol{\alpha}_1+(k_2-l_2)\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+(k_m-l_m)\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0},$$

由于$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性无关，因此$k_1=l_1,k_2=l_2,\cdots,k_m=l_m$，即表示法唯一.

4.3.8　设存在$k_1,k_2,\cdots,k_m$使得

$$k_1\boldsymbol{\beta}_1+k_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\beta}_m=\mathbf{0},$$

因此

$$k_1(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)+k_2(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)+\cdots+k_m(\boldsymbol{\alpha}_m+\boldsymbol{\alpha}_1)=\mathbf{0},$$

即

$$(k_1+k_m)\boldsymbol{\alpha}_1+(k_1+k_2)\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+(k_{m-1}+k_m)\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0},$$

由于$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性无关，因此

$$\begin{cases} k_1 \qquad\qquad + k_m = 0 \\ k_1 + k_2 \qquad\qquad = 0 \\ \qquad\quad \vdots \\ \qquad\qquad k_{m-1} + k_m = 0 \end{cases}.$$

此齐次线性方程组的系数行列式为$1+(-1)^{m+1}$，因此m为偶数时，系数行列式为零，此齐次线性方程组有非零解，故$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$线性相关；当$m$为奇数时，系数行列式不为零，此齐次线性方程组只有零解，故$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$线性无关.

4.3.9　$\Rightarrow$ $\boldsymbol{A}$可逆，则

$$R(\boldsymbol{A\varepsilon}_1, \boldsymbol{A\varepsilon}_2, \cdots, \boldsymbol{A\varepsilon}_n) = R\big(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n)\big) = R(\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n) = n,$$

因此$\boldsymbol{A\varepsilon}_1,\boldsymbol{A\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{A\varepsilon}_n$线性无关.

$\Leftarrow$由$\boldsymbol{A\varepsilon}_1,\boldsymbol{A\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{A\varepsilon}_n$线性无关，有$|\boldsymbol{A\varepsilon}_1,\boldsymbol{A\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{A\varepsilon}_n| = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n| \neq 0$，因此$|\boldsymbol{A}|\neq 0$，即$\boldsymbol{A}$可逆.

4.3.10　设存在k_1,k_2,k_3，使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + k_3\boldsymbol{\alpha}_3 = \boldsymbol{0},$$

等式两边左乘$\boldsymbol{A}$，由$\boldsymbol{A\alpha}_1 = \boldsymbol{0}$，有

$$k_2\boldsymbol{A\alpha}_2 + k_3\boldsymbol{A\alpha}_3 = k_2\boldsymbol{\alpha}_1 + k_3\boldsymbol{A\alpha}_3 = \boldsymbol{0},$$

等式两端再左乘$\boldsymbol{A}$，得

$$k_2\boldsymbol{A\alpha}_1 + k_3\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}_3 = k_3\boldsymbol{\alpha}_1 = \boldsymbol{0},$$

由于$\boldsymbol{\alpha}_1 \neq 0$，故$k_3 = 0$，从而$k_2 = 0$，进而$k_1 = 0$，因此$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关.

4.3.11　利用矩阵的初等行变换，有

$$(\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_4^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_5^{\mathrm{T}}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 7 & 2 & 5 \\ 4 & 2 & 14 & 0 & 10 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

（1）$R(\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_4^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_5^{\mathrm{T}}) = 3$；

（2）$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$为一个极大无关组，并且有$\boldsymbol{\alpha}_3 = 3\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_5 = 2\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2$.

4.3.12　依题，设两个向量组的极大无关组分别为：

$$\text{Ⅰ}：\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m, \qquad \text{Ⅱ}：\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m,$$

并且Ⅰ可由Ⅱ线性表示，则存在$\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m\times m}$使得

$$(\boldsymbol{\alpha}_1\ \ \boldsymbol{\alpha}_2\ \cdots\ \boldsymbol{\alpha}_m) = (\boldsymbol{\beta}_1\ \ \boldsymbol{\beta}_2\ \cdots\ \boldsymbol{\beta}_m)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix} \overset{\text{记}}{=} (\boldsymbol{\beta}_1\ \ \boldsymbol{\beta}_2\ \cdots\ \boldsymbol{\beta}_m)\boldsymbol{A},$$

因此有

$$m = R(\boldsymbol{\alpha}_1\ \ \boldsymbol{\alpha}_2\ \cdots\ \boldsymbol{\alpha}_m) = R((\boldsymbol{\beta}_1\ \ \boldsymbol{\beta}_2\ \cdots\ \boldsymbol{\beta}_m)\boldsymbol{A}) \leqslant R(\boldsymbol{A}) \leqslant m,$$

故 $R(\boldsymbol{A})=m$，从而 $\boldsymbol{A}$ 可逆．所以

$$(\boldsymbol{\beta}_1\ \ \boldsymbol{\beta}_2\ \ \cdots\ \ \boldsymbol{\beta}_m)=(\boldsymbol{\alpha}_1\ \ \boldsymbol{\alpha}_2\ \ \cdots\ \ \boldsymbol{\alpha}_m)\boldsymbol{A}^{-1},$$

即Ⅱ可由Ⅰ线性表示，因此这两个向量组等价．

4.3.13　记向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 为Ⅰ，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_m}$ 为Ⅱ，从Ⅰ中去掉Ⅱ中向量后，剩余的向量构成向量组Ⅲ，因此Ⅲ与Ⅱ合并就是Ⅰ，所以Ⅰ的秩≤Ⅱ的秩+Ⅲ的秩≤Ⅱ的秩 $+\ s-m$，即Ⅱ的秩≥$r+m-s$．

4.3.14　对系数矩阵进行初等行变换，

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&2&1\\2&1&-2&-2\\1&-1&-4&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&2&1\\0&1&2&4/3\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-2&-5/3\\0&1&2&4/3\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

上述矩阵对应的方程组为

$$\begin{cases}x_1=2x_3+\dfrac{5}{3}x_4\\x_2=-2x_3-\dfrac{4}{3}x_4\end{cases},$$

方程组的基础解系为 $\boldsymbol{\eta}_1=(2,-2,1,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\eta}_2=(5,-4,0,3)^{\mathrm{T}}$，方程组的通解为

$$\boldsymbol{x}=c_1\boldsymbol{\eta}_1+c_2\boldsymbol{\eta}_2\ \ （c_1,c_2\text{ 为任意实数}）.$$

4.3.15　对增广矩阵施以初等行变换，

$$(\boldsymbol{A}\ \ \boldsymbol{b})=\begin{pmatrix}1&1&-2&3&0\\2&1&-6&4&-1\\3&2&-8&7&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-2&3&0\\0&1&2&2&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-4&1&-1\\0&1&2&2&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix},$$

上述矩阵对应的方程组为

$$\begin{cases}x_1=-1+4x_3-x_4\\x_2=1-2x_3-2x_4\end{cases},$$

此方程组的一个特解 $\boldsymbol{\eta}=(-1,1,0,0)^{\mathrm{T}}$．对应的导出组为

$$\begin{cases}x_1=4x_3-x_4\\x_2=-2x_3-2x_4\end{cases},$$

导出组的基础解系，$\boldsymbol{\eta}_1=(4,-2,1,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\eta}_2=(-1,-2,0,1)^{\mathrm{T}}$．因此线性方程组的通解为

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\eta}+c_1\boldsymbol{\eta}_1+c_2\boldsymbol{\eta}_2\quad（c_1,c_2\text{ 为任意实数}）.$$

4.3.16　对增广矩阵施以初等行变换，有

$$(\boldsymbol{A}\ \ \boldsymbol{b})=\begin{pmatrix}1&1+\lambda&1&3\\1+\lambda&1&1&0\\1&1&1+\lambda&\lambda\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1+\lambda&1&3\\0&-\lambda(\lambda+3)&0&-2(\lambda+3)\\0&-\lambda&\lambda&\lambda-3\end{pmatrix},$$

故 $\lambda\neq0,-3$ 时，方程组有唯一解；当 $\lambda=0$ 时，

$$(\boldsymbol{A}\ \ \boldsymbol{b}) \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

有 $R(\boldsymbol{A}) \neq R(\boldsymbol{A}\ \ \boldsymbol{b})$，方程组无解；当 $\lambda = -3$ 时，

$$(\boldsymbol{A}\ \ \boldsymbol{b}) \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & -6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

有 $R(\boldsymbol{A}) = R(\boldsymbol{A}\ \ \boldsymbol{b}) = 2 < 3$，方程组有无穷多解；上述矩阵对应的方程组为

$$\begin{cases} x_1 = 1 + x_2 \\ x_3 = 2 + x_2 \end{cases},$$

非齐次线性方程组的一个特解 $\boldsymbol{\eta} = (1, 0, 2)^{\mathrm{T}}$．对应的导出组为

$$\begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_3 = x_2 \end{cases},$$

方程组基础解系为 $\boldsymbol{\eta}_1 = (1,1,1)^{\mathrm{T}}$．因此齐次线性方程组的通解为

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\eta} + c_1\boldsymbol{\eta}_1 \quad （c_1 为任意实数）.$$

4.3.17　对增广矩阵施以初等行变换，

$$(\boldsymbol{A}\ \ \boldsymbol{b}) \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b-2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & -5 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b-2 \end{pmatrix},$$

因此 $a = 0$ 且 $b = 2$ 时，方程组有解；此时

$$(\boldsymbol{A}\ \ \boldsymbol{b}) \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & -5 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

上述矩阵对应的方程组为

$$\begin{cases} x_1 = -2 + x_3 + x_4 + 5x_5 \\ x_2 = 3 - 2x_3 - 2x_4 - 6x_5 \end{cases},$$

方程组的一个特解为 $\boldsymbol{\eta} = (-2, 3, 0, 0, 0)^{\mathrm{T}}$，对应的导出组为

$$\begin{cases} x_1 = x_3 + x_4 + 5x_5 \\ x_2 = -2x_3 - 2x_4 - 6x_5 \end{cases},$$

基础解系为

$$\boldsymbol{\eta}_1 = (1, -2, 1, 0, 0)^{\mathrm{T}}，\quad \boldsymbol{\eta}_1 = (1, -2, 0, 1, 0)^{\mathrm{T}}，\quad \boldsymbol{\eta}_3 = (5, -6, 0, 0, 1)^{\mathrm{T}}，$$

故非齐次方程组的通解为

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\eta} + c_1\boldsymbol{\eta}_1 + c_2\boldsymbol{\eta}_2 + c_3\boldsymbol{\eta}_3 \ （c_1, c_2, c_3 为任意实数）.$$

4.3.18　利用矩阵的初等行变换有

$$A=\begin{pmatrix}1&2&1&2\\0&1&t&t\\1&t&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1-2t&2-2t\\0&1&t&t\\0&0&(t-1)^2&(t-1)^2\end{pmatrix},$$

由解空间的维数是2，有 $R(A)=4-2=2$，因此 $t=1$，此时上述矩阵对应的方程组为

$$\begin{cases}x_1-x_3=0\\x_2+x_3+x_4=0\end{cases},$$

基础解系为 $\boldsymbol{\eta}_1=(1,-1,1,0)^{\mathrm{T}}$， $\boldsymbol{\eta}_2=(0,-1,0,1)^{\mathrm{T}}$，因而可得此方程组的通解为

$$\boldsymbol{x}=c_1\boldsymbol{\eta}_1+c_2\boldsymbol{\eta}_2 \text{（}c_1,c_2\text{ 为任意实数）}.$$

4.3.19　由于 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关， $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 又可以表示 $\boldsymbol{\alpha}_1$，有 $R(\boldsymbol{A})=3$，进而 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的导出组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系中只含有一个解向量．再由 $\boldsymbol{\alpha}_1=2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$，有 $\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3=0$，因此 $\boldsymbol{\eta}_1=(1,-2,1,0)^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个非零解．由 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4$， $\boldsymbol{\eta}=(1,1,1,1)^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的一个特解．故方程组的通解为 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\eta}+c_1\boldsymbol{\eta}_1$，其中 c_1 为任意常数．

4.3.20　由于 $\boldsymbol{A}$ 是秩为3的 5×4 矩阵，因此 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的导出组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 基础解系中只含有一个解向量，而

$$\boldsymbol{A}\left[(3\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)-(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3)\right]=4\boldsymbol{b}-4\boldsymbol{b}=0,$$

因此

$$\boldsymbol{\eta}_1=\left(3\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2\right)-\left(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3\right)=\begin{pmatrix}0\\4\\6\\8\end{pmatrix}$$

是导出组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 基础解系，又由 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3)=4\boldsymbol{b}$，因此

$$\boldsymbol{\eta}=\frac{\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3}{4}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}2\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

是方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的一个特解，故原方程组的通解为

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\eta}+c_1\boldsymbol{\eta}_1,$$

其中 c_1 为任意实数.

4.3.21　设 $\boldsymbol{A}$ 的一个行向量为 (a_1,a_2,a_3)，由已知 $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$ 为对应的导出组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系，因此有

$$\begin{cases}a_1+2a_2+3a_3=0\\3a_1+2a_2+a_3=0\end{cases},$$

对此方程组的系数矩阵施以初等行变换：

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&2\end{pmatrix}.$$

上述矩阵对应的方程组为

$$\begin{cases}a_1=a_3\\a_2=-2a_3\end{cases},$$

基础解系为$\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$，因此可取 $\boldsymbol{A}$ 为$\begin{pmatrix}1&-2&1\end{pmatrix}$，故导出组为：

$$x_1-2x_2+x_3=0.$$

又由$\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$为方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的一个特解，因此 $b=1-2\times(-1)+1=4$，故所求方程为

$$x_1-2x_2+x_3=4.$$

4.3.22　由 $\boldsymbol{A\eta}=\boldsymbol{b}$ 可得 $\lambda=\mu$，进而有

$$(\boldsymbol{A}\ \ \boldsymbol{b})\to\begin{pmatrix}2&1&1&2&0\\0&1&3&1&1\\1&\lambda&\lambda&1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&1&1&2&0\\0&1&3&1&1\\0&\lambda-\dfrac{1}{2}&\lambda-\dfrac{1}{2}&0&0\end{pmatrix},$$

当 $\lambda\neq\dfrac{1}{2}$ 时，

$$(\boldsymbol{A}\ \ \boldsymbol{b})\to\begin{pmatrix}2&1&1&2&0\\0&1&3&1&1\\0&1&1&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&1&0\\0&0&2&1&1\\0&1&1&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-2&0&-1\\0&0&2&1&1\\0&1&1&0&0\end{pmatrix},$$

上述矩阵对应的方程组为

$$\begin{cases}x_1=-1+2x_3\\x_2=-x_3\\x_4=1-2x_3\end{cases},$$

方程组的一个特解为 $\boldsymbol{\eta}=\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$，导出组为

$$\begin{cases}x_1=2x_3\\x_2=-x_3\\x_4=-2x_3\end{cases},$$

基础解系为 $\boldsymbol{\eta}_1=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\\-2\end{pmatrix}$，因此方程组的通解为 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\eta}+c_1\boldsymbol{\eta}_1$，其中 c_1 为任意常数.

当 $\lambda=\dfrac{1}{2}$ 时，

$$(\boldsymbol{A}\ \ \boldsymbol{b})\to\begin{pmatrix}2&1&1&2&0\\0&1&3&1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&0&-2&1&-1\\0&1&3&1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&0&-2&1&-1\\-2&1&5&0&2\\0&0&0&0&0\end{pmatrix},$$

上述矩阵对应的方程组为

$$\begin{cases}x_2=2+2x_1-5x_3\\x_4=-1-2x_1+2x_3\end{cases},$$

方程组的一个特解为 $\boldsymbol{u}=\begin{pmatrix}0\\2\\0\\-1\end{pmatrix}$，导出组为

$$\begin{cases}x_2=2x_1-5x_3\\x_4=-2x_1+2x_3\end{cases},$$

基础解系为 $\boldsymbol{u}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\0\\-2\end{pmatrix},\boldsymbol{u}_2=\begin{pmatrix}0\\-5\\1\\2\end{pmatrix}$，因此方程组的通解为 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{u}+c_2\boldsymbol{u}_1+c_3\boldsymbol{u}_2$，其中 c_2，c_3 为任意实数.

4.3.23

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=\begin{pmatrix}1&2&0&1&0&-4\\2&1&6&8&3&7\\0&-1&2&2&1&t+1\\-2&-4&a-2&-2&a-2&10-a\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&2&0&1&0&-4\\0&1&-2&-2&-1&-5\\0&0&0&0&0&t-4\\0&0&a-2&0&a-2&2-a\end{pmatrix},$$

由于Ⅰ是方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系，故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，因此 $a\neq2$，此时

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)\to\begin{pmatrix}1&2&0&1&0&-4\\0&1&-2&-2&-1&-5\\0&0&1&0&1&-1\\0&0&0&0&0&t-4\end{pmatrix},$$

因此 $t=4$ 时，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 等价，即 II 也是方程组 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 基础解系.

4.3.24　由 $\boldsymbol{ABA}=\boldsymbol{B}^{-1}$ 整理可得 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{AB})(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{AB})=\mathbf{0}$，因此有

$$R(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{AB})+R(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{AB})\leqslant n,$$

再由

$$R(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{AB})+R(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{AB})\geqslant R(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{E}-\boldsymbol{AB})=R(\boldsymbol{E})=n,$$

故 $R(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{AB})+R(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{AB})=n$.

4.3.25　依题有

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{\beta}_1 & \boldsymbol{\beta}_2 & \boldsymbol{\beta}_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_2 & \boldsymbol{\alpha}_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & 2 & 0\\ 0 & 3 & 3\end{pmatrix},$$

而 $\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & 2 & 0\\ 0 & 3 & 3\end{pmatrix}$ 为可逆矩阵，因此

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_2 & \boldsymbol{\alpha}_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\beta}_1 & \boldsymbol{\beta}_2 & \boldsymbol{\beta}_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & 2 & 0\\ 0 & 3 & 3\end{pmatrix}^{-1},$$

从而 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 等价，故 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 也是 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 的基础解系.

4.3.26　（1）（反正法）设 $\boldsymbol{\eta},\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 线性相关，则 $\boldsymbol{\eta}$ 可由向量组 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 线性表示，从而 $\boldsymbol{\eta}$ 是齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 的解（与题设矛盾）. 因此结论成立；

（2）设存在 $k_1,k_2,\cdots,k_{n-r+1}$，使得

$$k_1(\xi_1+\boldsymbol{\eta})+k_2(\xi_2+\boldsymbol{\eta})+\cdots+k_{n-r}(\xi_{n-r}+\boldsymbol{\eta})+k_{n-r+1}\boldsymbol{\eta}=\mathbf{0},$$

整理得

$$k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}+(k_1+k_2+\cdots+k_{n-r}+k_{n-r+1})\boldsymbol{\eta}=\mathbf{0},$$

由（1）已证 $\boldsymbol{\eta},\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 线性无关，则有

$$k_1=k_2=\cdots=k_{n-r}=k_{n-r+1}=0,$$

所以有 $\xi_1+\boldsymbol{\eta},\xi_2+\boldsymbol{\eta},\cdots,\xi_{n-r}+\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\eta}$ 线性无关.

4.3.27　设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r)$，$\boldsymbol{AB}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r)$，有

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r)\boldsymbol{B},$$

由于 $\boldsymbol{B}$ 为可逆矩阵，从而有

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r)=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r)\boldsymbol{B}^{-1},$$

因此 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$ 等价，故 $\boldsymbol{A}$ 的 r 个列向量为某个齐次线性方组的基础解系时，$\boldsymbol{AB}$ 的 r 个列向量也为该齐次线性方程组的一个基础解系.

4.3.28　由 $\boldsymbol{A}$ 的行向量线性无关有 $R(\boldsymbol{A})=m$，因此 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 的基础解系中含有 $n-m$ 个解向量. 由 $\boldsymbol{B}$ 的列向量线性无关，有 $R(\boldsymbol{B})=n-m$. 再由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$ 有 $\boldsymbol{B}$ 的列向量均为 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 的解，

且 $\boldsymbol{B}$ 的列向量构成 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系．因此 $\boldsymbol{\eta}$ 可表示为 $\boldsymbol{B}$ 的列向量的线性组合，所以 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{\eta}$ 有解，又由 $R(\boldsymbol{B})=n-m$，故 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{\eta}$ 有唯一解．

4.3.29　设方程组

$$\text{III}：\begin{cases}2x_1+2x_2+2x_3-x_4=0\\ x_1-x_3+ax_4=0\\ x_1+3x_2+2x_3+x_4=0\\ 3x_1+2x_2+x_3-x_4=0\\ 3x_1+3x_2+bx_4=0\end{cases},$$

方程组 I 与 II 有非零公共解等价于III有非零解，对III的系数矩阵进行初等变换有

$$\begin{pmatrix}2&2&2&-1\\1&0&-1&a\\1&3&2&1\\3&2&1&-1\\3&3&0&b\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&3&2&1\\0&1&-1&b+1\\0&0&-6&4b+1\\0&0&0&-b+1\\0&0&0&-b+1+a\end{pmatrix},$$

因此 $b=1, a=0$ 时，进一步可求得方程组III有非零解 $c_1(5,-7,5,6)^{\mathrm{T}}$，其中 c_1 为任意常数．

4.3.30　（1）记 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=\begin{pmatrix}1&2&2\\1&1&2\\0&0&2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\ \boldsymbol{\beta}_2,\ \boldsymbol{\beta}_3)=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$，

因此有 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 到 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 的过渡矩阵为

$$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&2&2\\1&1&2\\0&0&2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&2&-1\\1&-1&0\\0&0&1/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1&0\\1&0&0\\0&0&1/2\end{pmatrix};$$

（2）由（1）有 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)\boldsymbol{P}^{-1}$，从而

$$\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)\boldsymbol{P}^{-1}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix},$$

故 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 下的坐标为 $1,2,2$．

4.3.31　由题意

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-1&0\\-2&-1&1\end{pmatrix},$$

而 $\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-1&0\\-2&-1&1\end{pmatrix}$ 为可逆矩阵，因此

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-1&0\\-2&-1&1\end{pmatrix}^{-1},$$

故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 等价，因此 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 为 $\boldsymbol{R}^3$ 的一组基，且有

$$\boldsymbol{\eta}=(\boldsymbol{\beta}_1,\ \boldsymbol{\beta}_2,\ \boldsymbol{\beta}_3)\begin{pmatrix}6\\-1\\-1\end{pmatrix}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-1&0\\-2&-1&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}6\\-1\\-1\end{pmatrix}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},$$

因此 $\boldsymbol{\eta}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_3$ 下的坐标为 $1,2,3$.

4.3.32　(1) 依题有

$$\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&1&0\\1&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix},$$

而

$$\boldsymbol{\alpha}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix},$$

所以由基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 到 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的过渡矩阵 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-1&1&0\\1&0&2\end{pmatrix}$.

(2) 由 (1) $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)\boldsymbol{P}$ ，有

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{P}^{-1}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-1&1&0\\1&0&2\end{pmatrix}^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&3\\-2&1&2\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&2&1\\2&3&1\\-1&-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&-1&1\\-4&-3&-1\\3&4&2\end{pmatrix},$$

即

$$\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}-1\\-4\\3\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}-1\\-3\\4\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}.$$

4.5　综合提高训练

例 4.5.1　【2011（2）】设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$ 是 4 阶矩阵，$\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，若 $(1,0,1,0)^{\mathrm{T}}$ 是方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系，则 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系可为（　　）.

（A）$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3$；　（B）$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$；　（C）$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$；　（D）$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$.

解　由 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系中只有一个解向量，有 $R(\boldsymbol{A})=4-1=3$ ，进而 $R(\boldsymbol{A}^*)=1$ ，所以 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系中含有 3 个解向量．再由 $R(\boldsymbol{A})=3$ ，可知 $R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=3$ ，又 $\boldsymbol{A}(1,0,1,0)^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{0}$ ，因此

$$(\boldsymbol{\alpha}_1\ \boldsymbol{\alpha}_2\ \boldsymbol{\alpha}_3\ \boldsymbol{\alpha}_4)(1,\ 0,\ 1,\ 0)^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{0},$$

即 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0}$， $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关，因此 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关．由于 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$，有

$$\boldsymbol{A}^*(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=\boldsymbol{O},$$

所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 是 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的解向量．因此 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 可为 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 基础解系．故（D）正确．

例 4.5.2　【2005（2）】确定常数 a，使向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\a\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\a\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}a\\1\\1\end{pmatrix}$ 可由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\a\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}-2\\a\\4\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_3=\begin{pmatrix}-2\\a\\a\end{pmatrix}$ 线性表示，但向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 不能由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示．

解　利用矩阵的初等行变换，有

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=\begin{pmatrix}1&-2&-2&1&1&a\\1&a&a&1&a&1\\a&4&a&a&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2&-2&1&1&a\\0&a+2&a+2&0&a-1&1-a\\0&0&a-4&0&3(1-a)&-(1-a)^2\end{pmatrix},$$

由于 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 可由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性表示，因此

$$R(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=R(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\alpha}_i),\ i=1,2,3,$$

从而 $a\neq-2,\ 4$；

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=\begin{pmatrix}1&1&a&1&-2&-2\\1&a&1&1&a&a\\a&1&1&a&4&a\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&1&a&1&-2&-2\\0&a-1&1-a&0&a+2&a+2\\0&0&(a+2)(1-a)&0&3a+6&4a+2\end{pmatrix},$$

由于 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，因此至少存在一个 $\boldsymbol{i}$ 使得

$$R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\neq R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\ \boldsymbol{\beta}_i),$$

因此 $a=1$ 或 $a=-2$．综上，可知 $a=1$ 为所求．

例 4.5.3　【2006（3）】设四维向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1+a\\1\\1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}2\\2+a\\2\\2\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}3\\3\\3+a\\3\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}4\\4\\4\\4+a\end{pmatrix},$$

问 a 为何值时，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关？当 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关时，求一个极大无关组，并将其余向量用该极大无关组线性表示．

解　利用矩阵的初等行变换，有

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1\ \ \boldsymbol{\alpha}_2\ \ \boldsymbol{\alpha}_3\ \ \boldsymbol{\alpha}_4)=\begin{pmatrix}1+a&2&3&4\\1&2+a&3&4\\1&2&3+a&4\\1&2&3&4+a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1+a&2&3&4\\-a&a&0&0\\-a&0&a&0\\-a&0&0&a\end{pmatrix}.$$

当 $a=0$ 时，

$$A \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

此时 $R(\boldsymbol{A})=1$，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关，$\boldsymbol{\alpha}_1$ 为一个极大无关组，且

$$\boldsymbol{\alpha}_2=2\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_3=3\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_4=4\boldsymbol{\alpha}_1;$$

当 $a\neq 0$ 时，

$$\boldsymbol{A} \to \begin{pmatrix} 1+a & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 10+a & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

当 $a=-10$ 时，$R(\boldsymbol{A})=3$，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关，$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 为一个极大无关组，且

$$\boldsymbol{\alpha}_1=-\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_4.$$

例 4.5.4　【2004（3）】设

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\a+2\\-3a\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}-1\\-b-2\\a+2b\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}1\\3\\-3\end{pmatrix},$$

讨论 $a,\ b$ 为何值时，

（1）$\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示；

（2）$\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_3$ 唯一线性表示，并求出表达式；

（3）$\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，但表达式不唯一，并求出表达式.

解　利用矩阵的初等行变换，有

$$(\boldsymbol{A}\ \ \boldsymbol{\beta})=(\boldsymbol{\alpha}_1\ \ \boldsymbol{\alpha}_2\ \ \boldsymbol{\alpha}_3\ \ \boldsymbol{\beta})=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & a+2 & -b-2 & 3 \\ 0 & -3a & a+2b & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & a & -b & 1 \\ 0 & 0 & a-b & 0 \end{pmatrix},$$

（1）$a=0$ 时，

$$(\boldsymbol{A}\ \ \boldsymbol{\beta}) \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

此时 $R(\boldsymbol{A})\neq R(\boldsymbol{A}\ \ \boldsymbol{\beta})$，$\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

（2）$a\neq 0$ 且 $a\neq b$ 时，$R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A}\ \ \boldsymbol{\beta})=3$，$\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_3$ 唯一线性表示，

$$\boldsymbol{\beta}=\left(1-\frac{1}{a}\right)\boldsymbol{\alpha}_1+\frac{1}{a}\boldsymbol{\alpha}_2.$$

（3）$a=b\neq 0$ 时，

$$(\boldsymbol{A}\ \ \boldsymbol{\beta})\to\begin{pmatrix}1&1&-1&1\\0&1&-1&\frac{1}{a}\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&1-\frac{1}{a}\\0&1&-1&\frac{1}{a}\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

此时 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A}\ \ \boldsymbol{\beta})=2<3$，$\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，但表示式不唯一，

$$\boldsymbol{\beta}=\left(1-\frac{1}{a}\right)\boldsymbol{\alpha}_1+\left(\frac{1}{a}+c\right)\boldsymbol{\alpha}_2+c\boldsymbol{\alpha}_3,$$

其中 c 为任意常数.

例 4.5.5　【2011（1，3）】设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix}$，不能由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}_3=\begin{pmatrix}3\\4\\a\end{pmatrix}$线性表示.

（1）求 a 的值；

（2）将 $\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，$\boldsymbol{\beta}_3$ 用 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

解　（1）$(\boldsymbol{\beta}_1\ \ \boldsymbol{\beta}_2\ \ \boldsymbol{\beta}_3\ \ \boldsymbol{\alpha}_1\ \ \boldsymbol{\alpha}_2\ \ \boldsymbol{\alpha}_3)=\begin{pmatrix}1&1&3&1&0&1\\1&2&4&0&1&3\\1&3&a&1&1&5\end{pmatrix}$

$$\to\begin{pmatrix}1&1&3&1&0&1\\0&1&1&-1&1&2\\0&2&a-3&0&1&4\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&1&3&1&0&1\\0&1&1&-1&1&2\\0&0&a-5&2&-1&0\end{pmatrix},$$

由于 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 不能由 $\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，$\boldsymbol{\beta}_3$ 线性表示，故 $a=5$；

（2）当 $a=5$ 时，

$$(\boldsymbol{\alpha}_1\ \ \boldsymbol{\alpha}_2\ \ \boldsymbol{\alpha}_3\ \ \boldsymbol{\beta}_1\ \ \boldsymbol{\beta}_2\ \ \boldsymbol{\beta}_3)=\begin{pmatrix}1&0&1&1&1&3\\0&1&3&1&2&4\\1&1&5&1&3&5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1&1&1&3\\0&1&3&1&2&4\\0&1&4&0&2&2\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&1&1&1&3\\0&1&3&1&2&4\\0&0&1&-1&0&-2\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&0&2&1&5\\0&1&0&4&2&10\\0&0&1&-1&0&-2\end{pmatrix},$$

故

$$\boldsymbol{\beta}_1=2\boldsymbol{\alpha}_1+4\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\quad \boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2,\quad \boldsymbol{\beta}_3=5\boldsymbol{\alpha}_1+10\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_3.$$

例 4.5.6　【2009（1,3）】设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-1&1&1\\0&-4&-2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$，

（1）求满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}_2=\boldsymbol{\xi}_1$，$\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\xi}_3=\boldsymbol{\xi}_1$ 的所有向量 $\boldsymbol{\xi}_2$，$\boldsymbol{\xi}_3$；

（2）对（1）中的任意向量 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$，证明 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$ 线性无关.

解　（1）利用矩阵的初等行变换，有

$$(\boldsymbol{A}\ \ \boldsymbol{\xi}_1)=\begin{pmatrix}1&-1&-1&-1\\-1&1&1&1\\0&-4&-2&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&-1&-1\\0&2&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&2&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

上述矩阵对应的方程组为

$$\begin{cases}x_1=-x_2\\x_3=1-2x_2\end{cases},$$

从而 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\xi}_1$ 的特解为 $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$，对应的导出组的基础解系为 $\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$，因此

$$\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix},$$

其中 c 为任意实数．再由

$$\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix}2&2&0\\-2&-2&0\\4&4&0\end{pmatrix},\quad (\boldsymbol{A}^2\ \ \boldsymbol{\xi}_1)=\begin{pmatrix}2&2&0&-1\\-2&-2&0&1\\4&4&0&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0&-\frac{1}{2}\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

故 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\xi}_1$ 的特解为 $\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\0\\0\end{pmatrix}$，对应的导出组的基础解系为 $\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$，因此

$$\boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\0\\0\end{pmatrix}+c_1\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},$$

其中c_1、c_2为任意实数.

（2）由于

$$|\xi_1\ \ \xi_2\ \ \xi_3| = \begin{vmatrix} -1 & c & -\frac{1}{2}-c_1 \\ 1 & -c & c_1 \\ -2 & 1+2c & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 1 & -c & c_1 \\ -2 & 1+2c & c_2 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} \neq 0,$$

故ξ_1, ξ_2, ξ_3线性无关.

例 4.5.7　【2005（3）】已知线性方程组Ⅰ：$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=0 \\ 2x_1+3x_2+5x_3=0 \\ x_1+2x_2+ax_3=0 \end{cases}$和Ⅱ：$\begin{cases} x_1+bx_2+cx_3=0 \\ 2x_1+b^2x_2+(c+1)x_3=0 \end{cases}$同解．求$a$、$b$、$c$的值.

解　显然Ⅱ有非零解，因此Ⅰ也有非零解．对于Ⅰ，利用矩阵的初等行变换有

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a-2 \end{pmatrix},$$

故$a=2$．进一步可解得$(-1,-1,1)^{\mathrm{T}}$是Ⅰ的基础解系，再将其代入Ⅱ中有

$$\begin{cases} -1-b+c=0 \\ -2-b^2+(c+1)=0 \end{cases},$$

因此有

$$\begin{cases} b=1 \\ c=2 \end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases} b=0 \\ c=1 \end{cases},$$

当$b=1,\ c=2$时，

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

此时Ⅰ与Ⅱ同解；当$b=0,\quad c=1$时，

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

此时Ⅰ与Ⅱ不同解．因此$a=2,\quad b=1,\quad c=2,$时，Ⅰ与Ⅱ同解.

例 4.5.8　【2007（1，3）】设线性方程组$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ x_1+2x_2+ax_3=0 \\ x_1+4x_2+a^2x_3=0 \end{cases}$与方程$x_1+2x_2+x_3=a-1$有公共解，求$a$的值及所有的公共解.

解　设ξ为公共解，则ξ是方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + ax_3 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + a^2 x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = a-1 \end{cases}$$

的解，对此方程组的增广矩阵进行初等行变换，

$$(\boldsymbol{A}\ \ \boldsymbol{b}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & a & 0 \\ 1 & 4 & a^2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & a-1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a-1 & 0 \\ 0 & 3 & a^2-1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a-1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1-a \\ 0 & 1 & 0 & a-1 \\ 0 & 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 0 & 0 & (a-1)(a-2) \end{pmatrix},$$

因此 $a=1$ 或 $a=2$ 时，$R(\boldsymbol{A}) = R(\boldsymbol{A}\ \ \boldsymbol{b})$，上述方程组有解．当 $a=1$ 时，

$$(\boldsymbol{A}\ \ \boldsymbol{b}) \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

可得公共解为 $c_1(-1,0,1)^{\mathrm{T}}$，其中 c_1 为任意的数；当 $a=2$ 时，

$$(\boldsymbol{A}\ \ \boldsymbol{b}) \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

可得公共解为 $(0,1,-1)^{\mathrm{T}}$．

例 4.5.9　【2008（1，3）】设 n 元方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$，其中

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2a & 1 & & & & \\ a^2 & 2a & 1 & & & \\ & a^2 & 2a & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & 2a & 1 \\ & & & & a^2 & 2a \end{pmatrix}_n, \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

（1）证明：$|\boldsymbol{A}| = (n+1)a^n$；

（2）a 为何值时，该方程组有唯一解，并求出解 x_1；

（3）a 为何值时，该方程组有无穷多解，并求出通解．

解　（1）由题意，有

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} 2a & 1 & & & & \\ a^2 & 2a & 1 & & & \\ & a^2 & 2a & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & 2a & 1 \\ & & & & a^2 & 2a \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2a & 1 & & & & \\ 0 & 3a/2 & 1 & & & \\ & a^2 & 2a & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & 2a & 1 \\ & & & & a^2 & 2a \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 2a & 1 & & & & \\ 0 & 3a/2 & 1 & & & \\ & & 4a/3 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & na/(n-1) & 1 \\ & & & & a^2 & (n+1)a/n \end{vmatrix}=(n+1)a^n;$$

（2）由（1）知，当 $a\neq 0$ 时，$|\boldsymbol{A}|\neq 0$，此时该方程组有唯一解．由克莱姆法则

$$|\boldsymbol{A}_1|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & & & & \\ 0 & 2a & 1 & & & \\ & a^2 & 2a & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & 2a & 1 \\ & & & & a^2 & 2a \end{vmatrix}_n=\begin{vmatrix} 2a & 1 & & & & \\ a^2 & 2a & 1 & & & \\ & a^2 & 2a & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & 2a & 1 \\ & & & & a^2 & 2a \end{vmatrix}_{n-1}=na^{n-1},$$

因此 $x_1=\dfrac{|\boldsymbol{A}_1|}{|\boldsymbol{A}|}=\dfrac{n}{(n+1)a}$；

（3）当 $a=0$ 时，

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \\ & 0 & 0 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

此时 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A}\ \ \boldsymbol{b})=n-1$，因此该方程组有无穷多解． $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的特解为 $\boldsymbol{u}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$，对应的导出组的基础解系为 $\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$，因此 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解为 $\boldsymbol{u}+c\boldsymbol{v}$，其中 c 为任意实数．

例 4.5.10　【2013（1，3）】设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & a\\ 1 & 0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & b\end{pmatrix}$. 当 a,b 为何值时，存在矩阵 $\boldsymbol{C}$ 使得 $\boldsymbol{AC}-\boldsymbol{CA}=\boldsymbol{B}$，并求所有矩阵 $\boldsymbol{C}$.

解　由题意，设 $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{pmatrix}$，代入 $\boldsymbol{AC}-\boldsymbol{CA}=\boldsymbol{B}$，整理有

$$\begin{pmatrix}-x_2+ax_3 & -ax_1+x_2+ax_4\\ x_1-x_3-x_4 & x_2-ax_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & b\end{pmatrix},$$

从而有

$$\begin{cases}-x_2+ax_3=0\\ -ax_1+x_2+ax_4=1\\ x_1-x_3-x_4=1\\ x_2-ax_3=b\end{cases},$$

即若矩阵 $\boldsymbol{C}$ 存在，则方程组有解，而

$$(\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{b})=\left(\begin{array}{cccc|c}0 & -1 & a & 0 & 0\\ -a & 1 & 0 & a & 1\\ 1 & 0 & -1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -a & 0 & b\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 0 & -1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -a & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1+a\\ 0 & 0 & 0 & 0 & b\end{array}\right),$$

因此可得 $a=-1,b=0$，并且此时

$$(\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{b})\to\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 0 & -1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right),$$

返回方程组为

$$\begin{cases}x_1=1+x_3+x_4\\ x_2=-x_3\end{cases},$$

令 $x_3=c_1,x_4=c_2$，则其全部解为

$$\begin{cases}x_1=1+c_1+c_2\\ x_2=-c_1\\ x_3=c_1\\ x_4=c_2\end{cases},$$

其中 c_1、c_2 为任意实数，且 $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1+c_1+c_2 & -c_1\\ c_1 & c_2\end{pmatrix}$.

例 4.5.11　【2012（1,3）】设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & a & 0 & 0\\ 0 & 1 & a & 0\\ 0 & 0 & 1 & a\\ a & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$，

（1）计算行列式$|\boldsymbol{A}|$；

（2）当实数a为何值时，方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$有无穷多解，并求其通解.

解　（1）$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1&a&0&0\\0&1&a&0\\0&0&1&a\\a&0&0&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&a&0&0\\0&1&a&0\\0&0&1&a\\0&a^2&0&1\end{vmatrix}=1-a^4$；

（2）利用矩阵的初等行变换，有

$$(\boldsymbol{A}\ \ \boldsymbol{\beta})=\begin{pmatrix}1&a&0&0&1\\0&1&a&0&-1\\0&0&1&a&0\\a&0&0&1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&a&0&0&1\\0&1&a&0&-1\\0&0&1&a&0\\0&-a^2&0&1&-a\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&a&0&0&1\\0&1&a&0&-1\\0&0&1&a&0\\0&0&a^3&1&-a-a^2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&a&0&0&1\\0&1&a&0&-1\\0&0&1&a&0\\0&0&0&1-a^4&-a-a^2\end{pmatrix},$$

因此$\begin{cases}1-a^4=0\\-a-a^2=0\end{cases}$，即$a=-1$时，方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$有无穷多解．当$a=-1$时，

$$(\boldsymbol{A}\ \ \boldsymbol{\beta})\to\begin{pmatrix}1&-1&0&0&1\\0&1&-1&0&-1\\0&0&1&-1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&-1&0\\0&1&0&-1&-1\\0&0&1&-1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix},$$

$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$的特解为$\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\0\end{pmatrix}$，对应的导出组的基础解系为$\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$，故方程组的通解为

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix},$$

其中c为任意常数.

例 4.5.12　【2010（1，3）】已知$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\lambda&1&1\\0&\lambda-1&0\\1&1&\lambda\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}a\\1\\1\end{pmatrix}$，已知方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$存在两个不同的解.

（1）求λ, a的值；

（2）求方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的通解.

解　（1）由条件知$|\boldsymbol{A}|=0$，因此$(\lambda-1)^2(\lambda+1)=0$，即$\lambda_1=1,\lambda_2=-1$．若$\lambda_1=1$，则

$R(A)=1, R(A\ b)=2$，此时方程组无解；由于方程组有解，所以必有 $\lambda_2=-1$，此时

$$(\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{b})=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1 & a\\ 0 & -2 & 0 & 1\\ 1 & 1 & -1 & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1 & a\\ 0 & -2 & 0 & 1\\ 0 & -2 & 0 & 1+a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1 & a\\ 0 & -2 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 2+a\end{pmatrix},$$

由于方程组有解，故 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{b})=2$，因此 $a=-2$.

（2）当 $\lambda_2=-1$， $a=-2$ 时，此时

$$(\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{b})\to\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1 & -2\\ 0 & -2 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 3/2\\ 0 & 1 & 0 & -1/2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

故方程组的通解为 $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}3/2\\ -1/2\\ 0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$，其中 c 为任意实数.

例 4.5.13　【2006（1）】已知非齐次线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=-1\\ 4x_1+3x_2+5x_3-x_4=-1\\ ax_1+x_2+3x_3+bx_4=1\end{cases}$ 有三个线性无关的解.

（1）证明方程组的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $R(\boldsymbol{A})=2$；（2）求 a, b 的值及方程组的通解.

解　（1）设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 是上述方程组的三个线性无关的解向量，从而 $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$ 也线性无关，且是对应的导出组的两个线性无关的解，因此导出组的基础解系所含有的向量的个数 $\geqslant 2$，即 $4-R(\boldsymbol{A})\geqslant 2$，$R(\boldsymbol{A})\leqslant 2$；而 $\boldsymbol{A}$ 中有 2 阶子式 $\begin{vmatrix}1 & 1\\ 4 & 3\end{vmatrix}=-1\neq 0$，因此 $R(\boldsymbol{A})\geqslant 2$，故 $R(\boldsymbol{A})=2$.

（2）$(\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{b})=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & -1\\ 4 & 3 & 5 & -1 & -1\\ a & 1 & 3 & b & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & -4 & 2\\ 0 & 1 & -1 & 5 & -3\\ 0 & 0 & 4-2a & 4a+b-5 & 4-2a\end{pmatrix}$，因为 $R(\boldsymbol{A})=2$，因此 $a=2, b=-3$，此时

$$(\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{b})\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & -4 & 2\\ 0 & 1 & -1 & 5 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

方程组的通解为

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}2\\ -3\\ 0\\ 0\end{pmatrix}+c_1\begin{pmatrix}-2\\ 1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}4\\ -5\\ 0\\ 1\end{pmatrix},$$

其中 c_1、c_2 为任意实数.

例 4.5.14　【2005（1）】已知三阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的第一行是 (a, b, c)（a, b, c 不全为零），矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & 6\\ 3 & 6 & k\end{pmatrix}$（$k$ 为常数），且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$. 求线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的通解.

解　由 a, b, c 不全为零知 $R(\boldsymbol{A})\geqslant 1$；由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$ 知 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非零解，因此 $R(\boldsymbol{A})\leqslant 2$，故 $R(\boldsymbol{A})=1$ 或 $R(\boldsymbol{A})=2$．若 $R(\boldsymbol{A})=1$，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 与 $ax_1+bx_2+cx_3=0$ 同解，因此设 $a\neq 0$，$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的通解为

$$\boldsymbol{x}=c_1\begin{pmatrix}-\dfrac{b}{a}\\ 1\\ 0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}\dfrac{-c}{a}\\ 0\\ 1\end{pmatrix},$$

其中 c_1，c_2 为任意常数；若 $R(\boldsymbol{A})=2$，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系中只含有一个解向量，由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$ 知，这个解向量为 $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$，因此 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的通解为 $c_3\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$，其中 c_3 为任意实数．

例 4.5.15　【2004（1）】设有齐次线性方程组

$$\begin{cases}(1+a)x_1+x_2+\cdots+x_n=0\\ 2x_1+(2+a)x_2+\cdots+2x_n=0\\ \qquad\cdots\\ nx_1+nx_2+\cdots+(n+a)x_n=0\end{cases}\quad (n\geqslant 2),$$

试问 a 为何值时，该方程组有非零解，并求出其通解．

解　利用矩阵的初等行变换，有

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1+a & 1 & \cdots & 1 & 1\\ 2 & 2+a & \cdots & 2 & 2\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ n-1 & n-1 & \cdots & n-1+a & n-1\\ n & n & \cdots & n & n+a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1+a & 1 & \cdots & 1 & 1\\ -2a & a & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ -(n-1)a & 0 & \cdots & a & 0\\ -na & 0 & \cdots & 0 & a\end{pmatrix},$$

当 $a=0$ 时，

$$\boldsymbol{A}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\end{pmatrix},$$

有 $R(\boldsymbol{A})=1$，方程组有非零解，基础解系为

$$\boldsymbol{v}_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{v}_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\ \vdots\\0\end{pmatrix},\ \cdots,\ \boldsymbol{v}_{n-1}=\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\ \vdots\\1\end{pmatrix},$$

因此方程组的通解为 $\boldsymbol{x}=c_1\boldsymbol{v}_1+c_2\boldsymbol{v}_2+\cdots+c_{n-1}\boldsymbol{v}_{n-1}$，其中 c_1，c_2，$\cdots$，c_{n-1} 为任意实数．当 $a\neq 0$ 时，

$$A \to \begin{pmatrix} \dfrac{n(n+1)}{2}+a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -(n-1) & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ -n & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

当 $a=-\dfrac{n(n+1)}{2}$ 时，

$$A \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -(n-1) & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ -n & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

因此 $R(\boldsymbol{A})=n-1$，故方程组有非零解，基础解系为 $\boldsymbol{v}_n=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\\vdots\\n\end{pmatrix}$，因此方程组的通解为 $c_n\boldsymbol{v}_n$，其中 c_n 为任意常数.

例 4.5.16　【2016（3）】 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1-a\\1&0&a\\a+1&1&a+1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}0\\1\\2a-2\end{pmatrix}$，且方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 无解.（1）求 a 的值；（2）求方程组 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}$ 的通解.

解　（1）由方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 无解，可知 $R(\boldsymbol{A})\neq R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta})$，故

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1&1&1-a\\1&0&a\\a+1&1&a+1\end{vmatrix}=0,$$

解得 $a=0$ 或 $a=2$．再由当 $a=0$ 时，$R(\boldsymbol{A})\neq R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta})$，当 $a=2$ 时，$R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta})$，故 $a=0$．

（2）当 $a=0$ 时，$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&2&2\\2&2&2\\2&2&2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}-1\\-2\\-2\end{pmatrix}$，故

$$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A},\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta})=\left(\begin{array}{ccc|c}3&2&2&-1\\2&2&2&-2\\2&2&2&-2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&1\\0&1&1&-2\\0&0&0&0\end{array}\right),$$

因此，方程组 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}$ 的通解为

$$\boldsymbol{x}=k\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}\qquad（k \text{ 为任意实数}）.$$

例 4.5.17　【2015（1）】设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是 $\boldsymbol{R}^3$ 的一个基，$\boldsymbol{\beta}_1=2\boldsymbol{\alpha}_1+2k\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\beta}_2=2\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+(k+1)\boldsymbol{\alpha}_3$.

（1）证明向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 是 $\boldsymbol{R}^3$ 的一个基；

（2）k 为何值时，存在非零向量 $\boldsymbol{\xi}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 与基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 下的坐标相同，并求所有的 $\boldsymbol{\xi}$.

解　（1）由题意

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}2&0&1\\0&2&0\\2k&0&k+1\end{pmatrix},$$

而 $\begin{vmatrix}2&0&1\\0&2&0\\2k&0&k+1\end{vmatrix}=4\neq 0$，因此 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 等价，故向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 是 $\boldsymbol{R}^3$ 的一个基.

（2）设 $\boldsymbol{\xi}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$，

因此

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}2&0&1\\0&2&0\\2k&0&k+1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix},$$

即

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\left(\boldsymbol{E}-\begin{pmatrix}2&0&1\\0&2&0\\2k&0&k+1\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\boldsymbol{0},$$

因此

$$\left(\boldsymbol{E}-\begin{pmatrix}2&0&1\\0&2&0\\2k&0&k+1\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\boldsymbol{0}.$$

对上述方程组的系数矩阵进行初等变换，

$$\boldsymbol{E}-\begin{pmatrix}2&0&1\\0&2&0\\2k&0&k+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0&-1\\0&-1&0\\-2k&0&-k\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&k\end{pmatrix},$$

当 $k=0$ 时，存在非零向量 $\boldsymbol{\xi}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 与基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 下的坐标相同．此时，

$$\boldsymbol{E}-\begin{pmatrix}2&0&1\\0&2&0\\2k&0&k+1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

从而

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathbf{0},$$

方程组的解为

$$\begin{cases} x_1 = -c \\ x_2 = 0 \\ x_3 = c \end{cases},$$

故 $\boldsymbol{\xi} = -c\boldsymbol{\alpha}_1 + c\boldsymbol{\alpha}_3$，其中 c 为任意实数.

第 5 章　特征值与特征向量、相似矩阵

5.1　知 识 要 点

5.1.1　向量的内积、长度及夹角

（1）向量的内积

设 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}$， $\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^{\mathrm{T}}$，则向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 的**内积**定义为

$$[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n .$$

内积的一些运算性质（设 $\boldsymbol{\alpha}$、$\boldsymbol{\beta}$ 和 $\boldsymbol{\gamma}$ 均为 n 维向量，k 为实数）：

1）$[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]=[\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}]$；

2）$[k\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]=k[\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}]$；

3）$[\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}]=[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma}]+[\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}]$；

4）$[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}]\geqslant 0$，当且仅当 $\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$ 时，$[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}]=0$；

5）（**施瓦兹不等式**）$[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]^2\leqslant[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}]\cdot[\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta}]$.

（2）向量的长度

设 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}$，称 $\|\boldsymbol{\alpha}\|=\sqrt{[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}]}=\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}$ 为向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的**长度**（或**范数**）．当 $\|\boldsymbol{\alpha}\|=1$ 时，称 $\boldsymbol{\alpha}$ 为**单位向量**．若 $\boldsymbol{\alpha}\neq\mathbf{0}$，则向量 $\dfrac{\boldsymbol{\alpha}}{\|\boldsymbol{\alpha}\|}$ 就是一个单位向量，由 $\boldsymbol{\alpha}$ 到 $\dfrac{\boldsymbol{\alpha}}{\|\boldsymbol{\alpha}\|}$ 的过程称为将向量 $\boldsymbol{\alpha}$ **单位化**.

向量长度的性质：（设 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 均为 n 维向量，k 为实数）

1）$\|\boldsymbol{\alpha}\|\geqslant 0$，当且仅当 $\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$ 时，$\|\boldsymbol{\alpha}\|=0$；

2）$\|k\boldsymbol{\alpha}\|=|k|\cdot\|\boldsymbol{\alpha}\|$；

3）（**三角不等式**）$\|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\|\leqslant\|\boldsymbol{\alpha}\|+\|\boldsymbol{\beta}\|$.

（3）向量的夹角

设 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 均为 n 维非零向量，称 $\theta=\arccos\dfrac{[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]}{\|\boldsymbol{\alpha}\|\cdot\|\boldsymbol{\beta}\|}$ $(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$ 为 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 的**夹角**．若 $[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]=0$，则称 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ **正交**，显然，零向量与任何相同维数的向量正交.

5.1.2　正交向量组

若 n 维非零向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 两两正交，即

$$[\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha}_j]=0\quad（i\neq j,i,j=1,2,\cdots,s），$$

则称该向量组为**正交向量组**．正交向量组一定是线性无关的向量组．若正交向量组中的每个向量都是单位向量，则称该向量组为**单位正交向量组**.

若单位正交向量组 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_s$ 为向量空间 $\boldsymbol{V}\ (\boldsymbol{V}\subseteq\boldsymbol{R}^n)$ 的基，则称其为 $\boldsymbol{V}$ 的**标准正交基**．$\boldsymbol{V}$ 中的任意向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 都可以由 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_s$ 线性表示，设表示式为

$$\boldsymbol{\alpha}=k_1\boldsymbol{e}_1+k_2\boldsymbol{e}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{e}_s,$$

则有 $k_i=[\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{\alpha}]\quad(i=1,2,\cdots,s)$．

设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 是 $\boldsymbol{R}^n$ 中线性无关向量组，令

$$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1,$$

$$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{[\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1]}{[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1]}\boldsymbol{\beta}_1,$$

$$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3-\frac{[\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1]}{[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1]}\boldsymbol{\beta}_1-\frac{[\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2]}{[\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2]}\boldsymbol{\beta}_2,$$

$$\cdots$$

$$\boldsymbol{\beta}_s=\boldsymbol{\alpha}_s-\frac{[\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}_1]}{[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1]}\boldsymbol{\beta}_1-\frac{[\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}_2]}{[\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2]}\boldsymbol{\beta}_2-\cdots-\frac{[\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}_{s-1}]}{[\boldsymbol{\beta}_{s-1},\boldsymbol{\beta}_{s-1}]}\boldsymbol{\beta}_{s-1}.$$

则有 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 两两正交，这个过程称为**施密特（Schmidt）正交化**过程．它还满足：对于任何的 $1\leqslant k\leqslant s$，$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_k$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_k$ 等价．对于 $\boldsymbol{R}^n$ 中的一个基，可以通过施密特正交化方法生成一个正交基，然后将该正交基中的每一个向量进行单位化，这样就得到 $\boldsymbol{R}^n$ 中的一个标准正交基．

5.1.3　正交矩阵及正交变换

若 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为**正交矩阵**，简称**正交阵**．若 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵，则称线性变换 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 为**正交变换**．对于正交变换而言，由于 $\|\boldsymbol{y}\|=\|\boldsymbol{x}\|$，因此正交变换能够保持向量的长度不变．

正交矩阵具有如下性质：

（1）若 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵，则 $\boldsymbol{A}$ 的行列式为 1 或−1；

（2）若 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵，则 $\boldsymbol{A}$ 可逆，且 $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$；

（3）若 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 均为正交矩阵，则 $\boldsymbol{AB}$ 也为正交矩阵；

（4）若 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵，则 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵的充分必要条件是其列（行）向量组是标准正交向量组．

5.1.4　矩阵的迹

矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 的主对角线元素之和称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**迹**，记为 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})$ 或 $\mathrm{trace}(\boldsymbol{A})$，即

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}.$$

矩阵迹的性质：

设 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶方阵，λ 为常数，则有：

（1） $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})+\mathrm{tr}(\boldsymbol{B})$；　　（2） $\mathrm{tr}(\lambda\boldsymbol{A})=\lambda\,\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})$；

（3） $\mathrm{tr}(\boldsymbol{AB})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{BA})$；　　（4） $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})$．

5.1.5　矩阵的特征值与特征向量

（1）特征值与特征向量的概念

设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵，若存在数 λ 和 n 维非零列向量 $\boldsymbol{x}$，使得 $\boldsymbol{Ax}=\lambda\boldsymbol{x}$ 成立，则称 λ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**特征值**，非零列向量 $\boldsymbol{x}$ 称为对应于（或属于）特征值 λ 的**特征向量**.

显然，若 $\boldsymbol{x}$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 λ 的特征向量，则 $k\boldsymbol{x}$ $(k\neq 0)$ 也为 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 λ 的特征向量．若 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_s$ 为 $\boldsymbol{A}$ 对应于同一特征值 λ 的特征向量，则其非零线性组合 $k_1\boldsymbol{x}_1+k_2\boldsymbol{x}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{x}_s$ 也为 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 λ 的特征向量.

（2）特征值、特征向量的求解

设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，则称 $f(\lambda)=\left|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}\right|$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**特征多项式**，$f(\lambda)=\left|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}\right|=0$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**特征方程**．矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值就是特征方程的解．在复数域内特征方程解的个数等于方程的次数，而在实数域内解的个数小于等于方程的次数.（重根按重数计算.）

对于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 λ_i，线性方程组 $(\boldsymbol{A}-\lambda_i\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的非零解就是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 对应于特征值 λ_i 的特征向量．若 λ_i 为实数，则特征向量可以取实向量，若 λ_i 为复数，则特征向量为复向量.

求解特征值、特征向量的步骤是：先通过特征方程 $f(\lambda)=\left|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}\right|=0$，解得 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$；然后对每个特征值 λ_i，求解齐次线性方程组 $(\boldsymbol{A}-\lambda_i\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_r$，则 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 λ_i 的全部特征向量为 $k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{\eta}_r$（其中 $k_1,k_2,\cdots,k_r$ 不全为零）.

（3）特征值的性质

设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$，$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值，k 为正整数，则有：

1）$\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}=\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})$；

2）$\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=|\boldsymbol{A}|$；

3）若 λ 为方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，则 λ^k 为方阵 $\boldsymbol{A}^k$ 的特征值；

4）若 $\varphi(\lambda)$ 为 λ 的多项式函数，则 $\varphi(\lambda)$ 为 $\varphi(\boldsymbol{A})$ 的特征值；

5）若方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 λ^{-1} 为 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的特征值，更一般地，λ^{-k} 为 $\boldsymbol{A}^{-k}$ 的特征值；

6）矩阵 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 具有相同的特征值；

7）方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆的充要条件是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值均不为零.

（4）特征向量的性质

1）方阵 $\boldsymbol{A}$ 的对应于不同特征值的特征向量线性无关；

2）λ_1 和 λ_2 是方阵 $\boldsymbol{A}$ 的两个不同的特征值，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_k$ 和 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 分别是对应于 λ_1 和 λ_2 的线性无关的特征向量，则向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_k,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 线性无关；

3）若 λ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 s 重特征值，则与 λ 对应的线性无关的特征向量的个数不超过 s.

5.1.6　相似矩阵

设 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶矩阵，若存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$，则称 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ **相似**，记为 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$，此时 $\boldsymbol{B}$ 也称为 $\boldsymbol{A}$ 的**相似矩阵**，运算 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ 称为对 $\boldsymbol{A}$ 进行**相似变换**，可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 称为将 $\boldsymbol{A}$ 化为 $\boldsymbol{B}$ 的**相似变换矩阵**．显然单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 只与自身相似 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{EP}=\boldsymbol{E}$.

矩阵的相似关系可以看作是一种等价关系，具有下列性质：

（1）自反性：$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 相似；

（2）对称性：若 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，则 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 相似；

（3）传递性：若 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，$\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 相似，则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 相似.

相似矩阵的性质：

设 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶矩阵，且 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，k 为某个正整数，则

（1）$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的行列式、秩和迹均对应相等，即 $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|$，$R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})$，$\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{B})$；

（2）若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 $\boldsymbol{B}$ 也可逆，且 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 与 $\boldsymbol{B}^{-1}$ 相似，$\boldsymbol{A}^*$ 与 $\boldsymbol{B}^*$ 相似；

（3）$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 相似，$\boldsymbol{A}^k$ 与 $\boldsymbol{B}^k$ 相似，更一般地，$\boldsymbol{A}$ 的多项式 $\phi(\boldsymbol{A})$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的多项式 $\varphi(\boldsymbol{B})$ 也相似；

（4）$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的特征多项式相等，特征值相同.

注　（1）若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$ 相似，则 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 就是 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值.

（2）若两个矩阵特征值相同，但它们不一定相似．例如，$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$ 和 $\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ 有相同的特征值，但 $\boldsymbol{E}$ 只与 $\boldsymbol{E}$ 相似，不与 $\boldsymbol{A}$ 相似.

5.1.7　一般矩阵的对角化

若 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 与对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$ 相似，则称 $\boldsymbol{A}$ 能**对角化**.

（1）矩阵 $\boldsymbol{A}$ 对角化的判定

1）n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 能对角化的充要条件为 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量；

2）若 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个互异的特征值，则 $\boldsymbol{A}$ 能对角化；

3）n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 能对角化的充要条件是每个特征值 λ_i 的重数 k_i 等于对应于 λ_i 的线性无关特征向量的个数，即齐次方程组 $(\boldsymbol{A}-\lambda_i\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的系数矩阵满足 $R(\boldsymbol{A}-\lambda_i\boldsymbol{E})+k_i=n$.

（2）矩阵 $\boldsymbol{A}$ 对角化的步骤

若 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 能对角化，使其对角化的步骤：

1）求解特征方程 $|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=0$，得到 $\boldsymbol{A}$ 全部的互异的特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$，它们的重数分别为 $k_1,k_2,\cdots,k_s$ $(k_1+k_2+\cdots+k_s=n)$；

2）对每个特征值 λ_i，求齐次线性方程组 $(\boldsymbol{A}-\lambda_i\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系．以这 n 个特征向量为列向量构成的矩阵 $\boldsymbol{P}$ 为可逆矩阵，且满足 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$ ．其中的 $\boldsymbol{\Lambda}$ 对角矩阵主对角线上的元素为 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值，并且特征值的排列应与 $\boldsymbol{P}$ 中的列向量的排列相对应.

5.1.8　实对称矩阵的对角化

（1）实对称矩阵的性质

1）实对称阵的特征值为实数.

2）实对称阵 $\boldsymbol{A}$ 对应于不同特征值的特征向量是正交的.

3）设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实对称矩阵，则必定存在正交矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n),$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.

4）n 阶实对称阵 $\boldsymbol{A}$ 的每个特征值 λ_i 的重数 k_i 等于对应于 λ_i 的线性无关特征向量的个数，即齐次方程组 $(\boldsymbol{A}-\lambda_i\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的系数矩阵满足 $R(\boldsymbol{A}-\lambda_i\boldsymbol{E})+k_i=n$.

5）实对称阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩等于 $\boldsymbol{A}$ 的非零特征值个数.

6）若 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 为 n 阶实对称阵，则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似的充要条件为 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 具有相同的特征值.

（2）实对称矩阵的对角化的步骤

求正交矩阵 $\boldsymbol{P}$ ，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 为对角矩阵的步骤：

1）求解特征方程 $|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\boldsymbol{0}$，得到 $\boldsymbol{A}$ 全部的互异的特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$，它们的重数分别为 $k_1,k_2,\cdots,k_s$ $(k_1+k_2+\cdots+k_s=n)$；

2）对每个特征值 λ_i，求齐次线性方程组 $(\boldsymbol{A}-\lambda_i\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系，并进行正交化、单位化．以这 n 个单位正交的特征向量为列向量构成的矩阵 $\boldsymbol{P}$ 为正交矩阵，且满足 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$.

注　实对称矩阵对角化有两种方法，一个是用一般的可逆矩阵，一个是用正交矩阵，在使用时要给合具体问题.

5.2　典型例题分析

5.2.1　题型一、向量的内积、长度及正交问题

例 5.2.1　求一个单位向量，使其同时与向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=(2,1,-4)^{\mathrm{T}}$ 和 $\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,-1,2)^{\mathrm{T}}$ 正交.

解　依题意，设 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$ 则有

$$\begin{cases}[\boldsymbol{x},\boldsymbol{\alpha}_1]=\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=2x_1+x_2-4x_3=0\\ [\boldsymbol{x},\boldsymbol{\alpha}_2]=\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=-x_1-x_2+2x_3=0\end{cases},$$

由矩阵的初等变换有

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&1&-4\\-1&-1&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1/2&-2\\0&-1/2&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&1&0\end{pmatrix},$$

上述矩阵对应的方程组为

$$\begin{cases}x_1=2x_3\\x_2=0\end{cases},$$

基础解系为 $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$，将 $\boldsymbol{x}$ 的单位化为 $\boldsymbol{\alpha}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$ 即可.

例 5.2.2　设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是正交单位向量组，求 $\|4\boldsymbol{\alpha}_1-7\boldsymbol{\alpha}_2+4\boldsymbol{\alpha}_3\|$.

解　由题意

$$\begin{aligned}\|4\boldsymbol{\alpha}_1-7\boldsymbol{\alpha}_2+4\boldsymbol{\alpha}_3\|&=\sqrt{(4\boldsymbol{\alpha}_1-7\boldsymbol{\alpha}_2+4\boldsymbol{\alpha}_3)^{\mathrm{T}}(4\boldsymbol{\alpha}_1-7\boldsymbol{\alpha}_2+4\boldsymbol{\alpha}_3)}\\&=\sqrt{4^2+(-7)^2+4^2}=9.\end{aligned}$$

5.2.2　题型二、正交矩阵问题

例 5.2.3　设 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵，且 $|\boldsymbol{A}|<0$，求：（1）$|\boldsymbol{A}|$；（2）$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|$.

解　（1）由 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵，有 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$，进而有 $|\boldsymbol{A}|^2=|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}||\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}|=1$，由此可得 $|\boldsymbol{A}|=\pm1$，再由 $|\boldsymbol{A}|<0$，故 $|\boldsymbol{A}|=-1$.

（2）由 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵，有 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{-1}$，从而

$$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|=|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{E}|=|\boldsymbol{A}||(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^{\mathrm{T}}|=-|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|,$$

所有 $2|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|=0$，故得 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|=0$.

例 5.2.4　设 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 为 n 阶正交矩阵，证明 $\boldsymbol{AB}$ 也是正交矩阵.

证　因为 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 为正交矩阵，所以 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{-1}$，$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{-1}$，则

$$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}=(\boldsymbol{AB})^{-1},$$

故 $\boldsymbol{AB}$ 也是正交矩阵.

5.2.3　题型三、特征值与特征向量问题的计算

例 5.2.5　【1999（1）】设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的所有元素为1，则 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为________.

解　由于 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}1-\lambda & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1-\lambda & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & 1 & \cdots & 1-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}n-\lambda & 1 & \cdots & 1\\ n-\lambda & 1-\lambda & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ n-\lambda & 1 & \cdots & 1-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}n-\lambda & 1 & \cdots & 1\\ 0 & -\lambda & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & -\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{n-1}\lambda^{n-1}(n-\lambda)=0,$$

有 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 n，0（$n-1$ 重根）.

例 5.2.6　设3阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $1,-2,2$，求：

（1）$|\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|$ 的值，并问 $\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 是否可逆；（2）$|3\boldsymbol{A}^*+4\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|$ 的值.

解　（1）设 $\varphi(\lambda)=\lambda^2+2\lambda+1$，则 $\varphi(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 的特征值为 $\varphi(1)=4$，$\varphi(-2)=1$，$\varphi(2)=9$，从而有 $|\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|=4\times1\times9=36$. 再由 $|\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|\neq0$，有 $\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 可逆.

（2）由 $|\boldsymbol{A}|=1\times(-2)\times2=-4$，以及

$$3\boldsymbol{A}^*+4\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}=3|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}+4\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}=-12\boldsymbol{A}^{-1}+4\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E},$$

设 $f(\lambda)=-\dfrac{12}{\lambda}+4\lambda+1$，则 $f(\boldsymbol{A})=3\boldsymbol{A}^*+4\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 的特征值为 $f(1)=-7$，$f(-2)=-1$，$f(2)=3$，所以 $|3\boldsymbol{A}^*+4\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|=(-7)\times(-1)\times3=21$.

例 5.2.7　设 $\boldsymbol{A}$ 为3阶实对称矩阵，且满足 $\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$，$R(\boldsymbol{A})=2$，求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.

解　依题，$\boldsymbol{A}$ 为3阶实对称矩阵，则 $\boldsymbol{A}$ 必有三个实特征值. 由 $\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$，有 $\boldsymbol{A}$ 的特征值应满足 $\lambda^2+2\lambda=0$，可解得 λ 只能取值 0 和 -2. 再由 $R(\boldsymbol{A})=2$，有 $\boldsymbol{A}$ 的特征值只有一个 0，故 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=-2$（2 重根），$\lambda_2=0$.

例 5.2.8　设向量 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},\beta=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}$ 都是非零向量，且满足条件 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=0$，记 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$，求：（1）$A^2$；（2）矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值与特征向量.

解　（0）因为 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=0$，且 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$，则

$$\boldsymbol{A}^2=(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})=\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{O}.$$

（2）设 λ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，$\boldsymbol{x}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 对应于 λ 的特征向量，则由 $\boldsymbol{Ax}=\lambda\boldsymbol{x}$，有 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}=\lambda^2\boldsymbol{x}$. 因为 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$ 及（1）中求得的 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{O}$，解得 $\lambda=0$，所以 $\lambda=0$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值. 又因为 $\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{\beta}\neq\boldsymbol{0}$，则它们至少有一个分量不等于零，不妨设 $x_1\neq0$，$y_1\neq0$，对应 $\lambda=0$ 的特征向量满足方程组 $(\boldsymbol{A}-0\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，即 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$，这里系数矩阵为：

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}x_1y_1 & x_1y_2 & \cdots & x_1y_n\\ x_2y_1 & x_2y_2 & \cdots & x_2y_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ x_ny_1 & x_ny_2 & \cdots & x_ny_n\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}y_1 & y_2 & \cdots & y_n\\ 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}.$$

方程的基础解系为：

$$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}-\dfrac{y_2}{y_1}\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}-\dfrac{y_3}{y_1}\\0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix},\quad\cdots,\quad \boldsymbol{\xi}_{n-1}=\begin{pmatrix}-\dfrac{y_n}{y_1}\\0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}.$$

于是属于 $\lambda=0$ 的所有特征向量为：

$$\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+k_{n-1}\boldsymbol{\xi}_{n-1}\ （其中 k_1,k_2,\cdots,k_{n-1} 不全为零）.$$

5.2.4　题型四、特征值与特征向量的证明问题

例 5.2.9　设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 阶矩阵，$\boldsymbol{B}$ 为 $n\times m$ 阶矩阵，证明矩阵 $\boldsymbol{AB}$ 和 $\boldsymbol{BA}$ 具有相同的非零特征值.

证　设 $\lambda\neq0$ 为 $\boldsymbol{AB}$ 的特征值，$\boldsymbol{x}$ 是对应于 λ 的特征向量，则有 $\boldsymbol{ABx}=\lambda\boldsymbol{x}$，由其可得 $\boldsymbol{BA}(\boldsymbol{Bx})=\lambda(\boldsymbol{Bx})$. 若其中的 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$，则有 $\boldsymbol{ABx}=\lambda\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，由于 $\lambda\neq0$，从而 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，这与 $\boldsymbol{x}$ 是特征向量矛盾. 因此 λ 为矩阵 $\boldsymbol{BA}$ 的特征值，$\boldsymbol{Bx}$ 为对应于特征值 λ 的特征向量.

类似方法可以证明 $\boldsymbol{BA}$ 的非零特征值也为 $\boldsymbol{AB}$ 的特征值，从而结论得证.

例 5.2.10　设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶方阵，若 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $R(\boldsymbol{A})=1$，证明 $\boldsymbol{A}$ 至少有两个为 0 的特征值.

证　设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{3\times3}$，则有

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda^3+\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})\lambda^2-D(2)\lambda+|\boldsymbol{A}|,$$

其中

$$D(2)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

由于 $R(\boldsymbol{A})=1$，有 $D(2)=0$ 及 $|\boldsymbol{A}|=0$，从而

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=-\lambda^3+\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})\lambda^2,$$

故矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})$，$\lambda_2=\lambda_3=0$.

注　秩为1的 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$，其特征值为 $\lambda_1=\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})$，$\lambda_2=\cdots=\lambda_n=0$.

例 5.2.11　【2008（3）】设 $\boldsymbol{A}$ 为3阶矩阵，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的分别属于 -1 和1的特征向量， 向量 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$.（1）证明 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关；（2）令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，求 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$.

（1）**证**　设

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}, \tag{①}$$

上式左乘 $\boldsymbol{A}$，并结合已知整理可得

$$-k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)=\boldsymbol{0}, \tag{②}$$

由①-②有

$$2k_1\boldsymbol{\alpha}_1-k_3\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{0},$$

因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于不同特征值的特征向量，所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关，故 $k_1=k_3=0$. 代入①式得 $k_2\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{0}$，又因为 $\boldsymbol{\alpha}_1\neq\boldsymbol{0}$，得 $k_2=0$，所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

（2）**解**　由 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，从而有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}&=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3)=(-\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)\\&=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix},\end{aligned}$$

由（1）可知 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$ 可逆，所以

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

5.2.5　题型五、相似矩阵问题

例 5.2.12　矩阵 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$，其中 $\boldsymbol{P}$ 为可逆矩阵，λ_0 是 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的特征值，若 $\boldsymbol{\alpha}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 对应于 λ_0 的特征向量，则 $\boldsymbol{B}$ 对应于 λ_0 的特征向量是（　　）.

（A）$\boldsymbol{\alpha}$；　（B）$\boldsymbol{P}\boldsymbol{\alpha}$；　（C）$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\alpha}$；　（D）$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$.

解　由 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$，有 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}$，等式两端右乘 $\boldsymbol{\alpha}$ 并整理有

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{P}^{-1}(\lambda_0\boldsymbol{\alpha})=\lambda_0(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\alpha}),$$

显然 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\alpha}\neq 0$. 所以本题选（C）.

例 5.2.13　矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似的充分条件为（　　）.

（A）$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 具有相同的特征多项式；　　（B）$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 具有相同的特征值；

（C）矩阵 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 相似；　　（D）$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 具有相同的特征向量.

解　根据相似矩阵的性质，若 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 相似，则 $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$ 与 $(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$ 相似，从而 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似. 选项（A）和选项（B）为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似的必要条件，不是充分条件．例如，设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&-1\\1&-1\end{pmatrix},$$

易得 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 具有相同的特征多项式和相同的特征向量，但显然对于任意的逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 有

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}1&-1\\1&-1\end{pmatrix}=\boldsymbol{B}\ .$$

选项（D）也是错误的．例如，取

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},$$

显然对于任意的非零向量 $\boldsymbol{x}$，有 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=0\boldsymbol{x}$， $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=1\boldsymbol{x}$，即 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 具有相同的特征向量，但对于任意的逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 有

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\boldsymbol{B}\ ,$$

即 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 不相似．所以本题选（C）.

注　零矩阵、单位矩阵只能与自己相似.

例 5.2.14　【2003，（4）】已知矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$，若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，则 $(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})$ 与 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})$ 秩的和等于（　　）.

（A）2；　　（B）3；　　（C）4；　　（D）5.

解　依题，由于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，有 $\boldsymbol{B}-2\boldsymbol{E}$ 与 $\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}$ 相似， $\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E}$ 与 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$ 也相似．从而 $R(\boldsymbol{B}-2\boldsymbol{E})=R(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})$， $R(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E})=R(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})$．再由

$$\boldsymbol{B}-2\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}-2&0&1\\0&-1&0\\1&0&-2\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}-\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&0&0\\1&0&-1\end{pmatrix},$$

易得 $R(\boldsymbol{B}-2\boldsymbol{E})=3$， $R(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E})=1$．所以本题选（C）.

例 5.2.15　【2015（1，3）】设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&2&-3\\-1&3&-3\\1&-2&a\end{pmatrix}$ 相似于矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&-2&0\\0&b&0\\0&3&1\end{pmatrix}$.

（1）求 a,b 的值；　　（2）求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 为对角矩阵.

解　（1）因为 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，有 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{B})$， $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|$，可解得 $a=4,b=5$.

（2）显然 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&-2&0\\0&5&0\\0&3&1\end{pmatrix}$ 的特征值为 $1,1,5$，则 $\boldsymbol{A}$ 的特征值也是 $1,1,5$.

当 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 时，求解方程组 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，解得基础解系为 $\boldsymbol{\eta}_1=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\eta}_2=\begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix}$.

当 $\lambda_3=5$ 时，求解方程组 $(\boldsymbol{A}-5\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，解得基础解系为 $\boldsymbol{\eta}_3=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$.

令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3)$，则有 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&5\end{pmatrix}$.

例 5.2.16　【2016（1，3）】已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&-1&1\\2&-3&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.

（1）求 $\boldsymbol{A}^{99}$；（2）设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，满足 $\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$，记 $\boldsymbol{B}^{100}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$，将 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 分别表示为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的线性组合.

解　（1）由于

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}-\lambda&-1&1\\2&-3-\lambda&0\\0&0&-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda(\lambda+1)(\lambda+2),$$

因此 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=-1$，$\lambda_2=-2$，$\lambda_3=0$；当 $\lambda_1=-1$，求解方程组 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=0$，解得基础解系为 $\boldsymbol{\eta}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$；当 $\lambda_2=-2$ 时，求解方程组 $(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=0$，解得基础解系为 $\boldsymbol{\eta}_2=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$；当 $\lambda_3=0$ 时，求解方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=0$，解得基础解系为 $\boldsymbol{\eta}_3=\begin{pmatrix}3\\2\\2\end{pmatrix}$. 令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3)$，则有

$$\boldsymbol{P}^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4&-2&-4\\-2&2&1\\0&0&1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-2&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

从而

$$\boldsymbol{A}^{99}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}^{99}\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}-2+2^{99}&1-2^{99}&2-2^{98}\\-2+2^{100}&1-2^{100}&2-2^{99}\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

（2）由 $\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$，可得

$$\boldsymbol{B}^{100}=\boldsymbol{B}^{98}\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{B}^{98}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}^{99}\boldsymbol{A}=\cdots=\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{99},$$

由（1）得

$$B^{100}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}-2+2^{99} & 1-2^{99} & 2-2^{98}\\ -2+2^{100} & 1-2^{100} & 2-2^{99}\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

所以

$$\boldsymbol{\beta}_1=(-2+2^{99})\boldsymbol{\alpha}_1+(-2+2^{100})\boldsymbol{\alpha}_2;\quad \boldsymbol{\beta}_2=(1-2^{99})\boldsymbol{\alpha}_1+(1-2^{100})\boldsymbol{\alpha}_2;$$

$$\boldsymbol{\beta}_3=(2-2^{98})\boldsymbol{\alpha}_1+(2-2^{99})\boldsymbol{\alpha}_2.$$

例 5.2.17　【2001，(1)】设3阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与三维向量 $\boldsymbol{x}$ 满足 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{Ax}, \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}$ 线性无关，且 $\boldsymbol{A}^3\boldsymbol{x}=3\boldsymbol{Ax}-2\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}$，记 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{Ax}, \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x})$.

(1) 求3阶矩阵 $\boldsymbol{B}$，使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{PBP}^{-1}$；(2) 计算行列式 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|$.

解　(1) 由 $\boldsymbol{A}^3\boldsymbol{x}=3\boldsymbol{Ax}-2\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}$，有

$$\boldsymbol{A}^3\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{Ax},\ \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x})\begin{pmatrix}0\\3\\-2\end{pmatrix},$$

从而

$$\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{Ax}, \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x})=(\boldsymbol{Ax}, \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}, \boldsymbol{A}^3\boldsymbol{x})=(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{Ax}, \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x})\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&3\\0&1&-2\end{pmatrix},$$

所以有 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&3\\0&1&-2\end{pmatrix}$，使得 $\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{PB}$，即 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{PBP}^{-1}$.

(2) 由(1)可知矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，所以 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 与 $\boldsymbol{B}+\boldsymbol{E}$ 也相似，故

$$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|=|\boldsymbol{B}+\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}1&0&0\\1&1&3\\0&1&-1\end{vmatrix}=-4.$$

5.2.6　题型六、对称矩阵的对角化问题

例 5.2.18　【2010(1)】设 $\boldsymbol{A}$ 为4阶实对称矩阵，满足 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$，若 $\boldsymbol{A}$ 的秩为3，则 $\boldsymbol{A}$ 相似于(　　).

(A) $\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$；　(B) $\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$；

(C) $\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$；　(D) $\begin{pmatrix}-1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$.

解　设 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，由 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$，有 λ 应满足 $\lambda^2+\lambda=0$，解得 $\lambda=-1$ 或 0．又因为 $\boldsymbol{A}$ 为 4 阶实对称矩阵，且 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 3，所以 $\boldsymbol{A}$ 相似于对角矩阵

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

故选项为（D）.

例 5.2.19　设 n 阶对称阵 $\boldsymbol{A}$ 为幂等矩阵，即满足 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$，证明 $R(\boldsymbol{A})=\operatorname{tr}(\boldsymbol{A})$，且存在正交阵 $\boldsymbol{P}$ 使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}_{n-r} \end{pmatrix}$，其中 $r=\operatorname{tr}(\boldsymbol{A})$.

解　设 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，由 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$，有 λ 应满足 $\lambda^2=\lambda$，解得 $\lambda=0$ 或 1．因为 $\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵，有 $\boldsymbol{A}$ 相似于对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$，且 $\boldsymbol{\Lambda}$ 的主对角线元素为 0 或 1．对于 $\boldsymbol{\Lambda}$，显然有 $R(\boldsymbol{\Lambda})=\operatorname{tr}(\boldsymbol{\Lambda})$，从而由相似的性质可得

$$R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{\Lambda})=\operatorname{tr}(\boldsymbol{\Lambda}).$$

设 r 为对角阵 $\boldsymbol{\Lambda}$ 主对角线元素中 1 的个数，$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_r$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 1 的单位正交化向量组，$\boldsymbol{e}_{r+1},\boldsymbol{e}_{r+2},\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 0 的单位正交化向量组，令

$$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_r,\boldsymbol{e}_{r+1},\boldsymbol{e}_{r+2},\cdots,\boldsymbol{e}_n),$$

则 $\boldsymbol{P}$ 为正交矩阵，且满足

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}_{n-r} \end{pmatrix}.$$

例 5.2.20　【2006（1）】设 3 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的各行元素之和均为 3，向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=(-1,2,-1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(0,-1,1)^{\mathrm{T}}$ 是线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的两个解.

（1）求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值与特征向量；（2）求正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$，使得 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{\Lambda}$.

解　（1）依题有

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_i=\boldsymbol{0}=0\boldsymbol{\alpha}_i \quad (i=1,2),$$

因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 均为非零向量，所以 $\boldsymbol{A}$ 有特征值 0，且向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是对应特征值 0 的特征向量．再由 $\boldsymbol{A}$ 的各行元素之和为 3，有

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}=3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

从而 3 也是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，且对应于特征值 3 的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_3=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$.

（2）将 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 正交化，令

$$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{[\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1]}{[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1]}\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}-\frac{-3}{6}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

再将 $\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 单位化，令

$$\gamma_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\quad \gamma_2=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix},\quad \gamma_3=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},$$

令正交矩阵 $\boldsymbol{Q}=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)$，则 $\boldsymbol{Q}^{-1}=\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}$，并且有

$$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

例 5.2.21　【2010（2）】设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&-1&4\\-1&3&a\\4&a&0\end{pmatrix}$，正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 使得 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}$ 成为对角矩阵，若 $\boldsymbol{Q}$ 的第一列为 $\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1)^{\mathrm{T}}$，求 a，$\boldsymbol{Q}$.

解　依题意，记 $\gamma_1=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1)^{\mathrm{T}}$，并设 γ_1 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 对应于特征值 λ_1 特征向量，则有 $\boldsymbol{A}\gamma_1=\lambda_1\gamma_1$，即

$$\begin{pmatrix}0&-1&4\\-1&3&a\\4&a&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}=\lambda_1\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},$$

解得 $a=-1,\lambda_1=2$，进而由

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}-\lambda&1&4\\-1&3-\lambda&-1\\4&-1&-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)(5-\lambda)(4+\lambda)=0,$$

解得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=2,\lambda_2=5,\lambda_3=-4$.

当 $\lambda_2=5$ 时，求解方程组 $(\boldsymbol{A}-5\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=0$，解得对应于 5 的特征向量 $\boldsymbol{\eta}_2=(1,-1,1)^{\mathrm{T}}$，单位化得 $\gamma_2=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)^{\mathrm{T}}$；

当 $\lambda_3=-4$ 时，求解方程组 $(\boldsymbol{A}+4\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=0$，解得对应于 -4 的特征向量 $\boldsymbol{\eta}_3=(-1,0,1)^{\mathrm{T}}$，单位化为 $\gamma_3=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1)^{\mathrm{T}}$. 令

$$\boldsymbol{Q}=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{2}{\sqrt{6}}&-\frac{1}{\sqrt{3}}&0\\\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix},$$

则有 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&5&0\\0&0&-4\end{pmatrix}$.

5.3　深 化 训 练

5.3.1　填空题

（1）【2015（3）】设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $2,-2,1$，$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$，其中 $\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位矩阵，则行列式 $|\boldsymbol{B}|=$________.

（2）设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式 $|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=(1-\lambda)(2-\lambda)(-3-\lambda)$，则 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^{-1})=$________.

（3）【2000（1，3）】若 4 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5}$，则 $|\boldsymbol{B}^{-1}-\boldsymbol{E}|=$________.

（4）【2009（3）】设 $\boldsymbol{\alpha}=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}=(1,0,k)^{\mathrm{T}}$，若矩阵 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$ 相似于 $\begin{pmatrix}3&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，则 $k=$______.

（5）设 3 阶对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $1,2,3$，$\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 $1,2$ 的特征向量分别为 $\boldsymbol{\alpha}_1=(-1,-1,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,-2,-1)^{\mathrm{T}}$，则 $\boldsymbol{A}$ 对应于特征值 3 的特征向量可取为________.

（6）设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=0$ 有非零解，则 $\boldsymbol{A}$ 必有一个特征值等于________.

（7）设可逆矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的三个特征值分别为 $1,-1,2$，则 $\boldsymbol{A}^*$ 的 3 个特征值分别为________.

（8）已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}$，向量 $\boldsymbol{\alpha}=(1,k,1)^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的特征向量，则 $k=$________.

5.3.2　单项选择题

（1）若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，则下列结论可能错误的是（　　）.

（A）$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 对应于相同的特征值，它们的特征向量相同；

（B）$\boldsymbol{A}^2$ 与 $\boldsymbol{B}^2$ 相似；

（C）$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似于同一矩阵；

（D）$|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|$.

（2）n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 仅有 λ_0 是 k 重特征值，其余都不是重特征值．若 $\boldsymbol{A}$ 可以对角化，则矩阵 $\boldsymbol{A}-\lambda_0\boldsymbol{E}$ 的秩为（　　）.

（A）n；　　（B）k；　　（C）$n-k$；　　（D）$k-n$.

（3）设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵，则下列结论正确的是（　　）.

（A）$\boldsymbol{A}$ 与对角矩阵相似；

（B）$\boldsymbol{A}$ 与对角矩阵不相似；

（C）对应于 $\boldsymbol{A}$ 的不同特征值的特征向量正交；

（D）存在正交矩阵 $\boldsymbol{P}$，使 $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})$ 为对角矩阵.

（4）【2013（1，2，3）】矩阵 $\begin{pmatrix}1&a&1\\a&b&a\\1&a&1\end{pmatrix}$ 与矩阵 $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&b&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ 相似的充分必要条件为（　　）.

（A）$a=0,b=2$；　　（B）$a=0,b$ 为任意常数；

（C）$a=2,b=0$；　　（D）$a=2,b$ 为任意常数.

（5）【2012（1，2，3）】设 A 为 3 阶矩阵，P 为可逆矩阵，且 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$，若 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$　$Q=(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2,\alpha_3)$，则 $Q^{-1}AQ=$（　　）.

（A）$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$；　（B）$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$；

（C）$\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$；　（D）$\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

5.3.3　设矩阵 $A=\begin{pmatrix}-5&4\\-6&5\end{pmatrix}$，试求 A^{2015}.

5.3.4　【2014（3）】已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\1&1&\cdots&1\\\vdots&\vdots&&\vdots\\1&1&\cdots&1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}0&0&\cdots&1\\0&0&\cdots&2\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&n\end{pmatrix}$. 证明 A 与 B 相似.

5.3.5　【1999（3）】设矩阵 $A=\begin{pmatrix}a&-1&c\\5&b&3\\1-c&0&-a\end{pmatrix}$，且 $|A|=-1$，又设 A^* 有特征值 λ_0，且属于 λ_0 的特征向量为 $\alpha=(-1,-1,1)^{\mathrm{T}}$，求 a,b,c 及 λ_0 的值.

5.3.6　【2007（3）】设 3 阶实对称矩阵 A 的特征值 $\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=-2$，且 $\alpha_1=(1,-1,1)^{\mathrm{T}}$ 是 A 的属于 $\lambda_1=1$ 的特征向量，记 $B=A^5-4A^3+E$，其中 E 为 3 阶单位矩阵.

（1）验证 α_1 是矩阵 B 的特征向量，并求 B 全部特征值与特征向量；（2）求矩阵 B.

5.3.7　【2011（2）】设 A 为秩是 2 的 3 阶实对称矩阵，且 $A\begin{pmatrix}1&1\\0&0\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1\\0&0\\1&1\end{pmatrix}$. 求：

（1）矩阵 A 的所有特征值与特征向量；（2）矩阵 A.

5.3.8　设矩阵 $A=\begin{pmatrix}0&-1&1\\-1&k&1\\1&1&0\end{pmatrix}$，且已知 A 的一个特征值是 -2，试求：

（1）k 的值；（2）可逆矩阵 P，使 $(AP)^{\mathrm{T}}(AP)$ 为对角矩阵.

5.4　深化训练详解

5.3.1　填空题

（1）21. **提示**　由题意，令 $\varphi(x)=x^2-x+1$，则矩阵 B 的 3 个特征值分别为 $\varphi(2),\varphi(-2),\varphi(1)$, 从而 $|B|=\varphi(2)\times\varphi(-2)\times\varphi(1)=21$.

（2）$\dfrac{7}{6}$.

（3）24．**提示**　由题意，令 $\phi(x)=\dfrac{1}{x}-1$，有 $\boldsymbol{B}^{-1}-\boldsymbol{E}$ 的特征值为 $1,2,3,4$，因此 $\left|\boldsymbol{B}^{-1}-\boldsymbol{E}\right|=1\times2\times3\times4=24$.

（4）4. **提示**　$\mathrm{tr}(\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})=1+k$，再相似矩阵具有相同的迹，从而 $1+k=3$，解得 $k=2$.

（5）$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$.　　（6）0.　　（7）$-2,2,-1$.　　（8）$k=1$ 或 $k=-2$.

5.3.2　单项选择题

（1）（A）．**提示**　设 $\boldsymbol{x}$ 为 $\boldsymbol{B}$ 的对应于特征值为 λ 的特征向量，则有 $\boldsymbol{Bx}=\lambda\boldsymbol{x}$．又因为 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，因此存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$，因此 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{APx}=\lambda\boldsymbol{x}$，从而 $\boldsymbol{PP}^{-1}\boldsymbol{APx}=\boldsymbol{P}\lambda\boldsymbol{x}$，即 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{Px})=\lambda(\boldsymbol{Px})$，即对应于特征值 λ，$\boldsymbol{B}$ 的特征向量为 $\boldsymbol{x}$，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量为 $\boldsymbol{Px}$，若 $\boldsymbol{P}\neq\boldsymbol{E}$，则 $\boldsymbol{Px}$ 与 $\boldsymbol{x}$ 是不相等的.

（2）（C）．　　（3）（D）．

（4）（B）．**提示**　由于 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&a&1\\a&b&a\\1&a&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&b&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ 均为实对称矩阵，所以它们相似的充分必要条件是具有相同的特征值 $2,b,0$.

当 $\lambda_1=2$ 时，有

$$\left|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}\right|=\begin{vmatrix}-1&a&1\\a&b-2&a\\1&a&-1\end{vmatrix}=(b-2)+2a^2-(b-2)+2a^2=4a^2=0,$$

解得 $a=0$；又因为 $\left|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}\right|=\left|\boldsymbol{B}-\lambda\boldsymbol{E}\right|$，可知

$$\begin{vmatrix}1-\lambda&0&1\\0&b-\lambda&0\\1&0&1-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2-\lambda&0&0\\0&b-\lambda&0\\0&0&\lambda\end{vmatrix},$$

对任意的 b 都成立．故选（B）.

（5）（B）．**提示**　因为

$$\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},$$

从而

$$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{AQ}=\left[\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}\boldsymbol{P}^{-1}\right]\boldsymbol{A}\left[\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP})\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}.$$

5.3.3　由于

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}-5-\lambda & 4\\ -6 & 5-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-1,$$

因此 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=-1$，$\lambda_2=1$．当 $\lambda_1=-1$ 时，求解 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=0$，解得基础解系为 $\boldsymbol{\eta}_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$；当 $\lambda_2=1$ 时，求解 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=0$，解得基础解系为 $\boldsymbol{\eta}_2=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$，取 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&2\\1&3\end{pmatrix}$，则有

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix},$$

从而

$$\boldsymbol{A}^{2015}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}^{2015}\boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}(-1)^{2015} & \\ & 1^{2015}\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}-1 & \\ & 1\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{A}\ .$$

5.3.4　依题有

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=|\boldsymbol{B}-\lambda\boldsymbol{E}|=(-1)^{n-1}\lambda^{n-1}(n-\lambda),$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 有相同的特征值 $\lambda_1=n,\lambda_2=0$（$n-1$ 重根）．因为 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵，从而其相似于

$$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}n&0&\cdots&0\\0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&0\end{pmatrix}.$$

对于矩阵 $\boldsymbol{B}$，当 $\lambda_2=0$ 时，由于 $R(B)=1$，所以方程组 $(\boldsymbol{B}-0\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 有 $n-1$ 个线性无关的解向量，即 $\boldsymbol{B}$ 对应 $\lambda_2=0$ 有 $n-1$ 个线性无关的特征向量，进而 $\boldsymbol{B}$ 有 n 个线性无关的特征向量，所以 $\boldsymbol{B}$ 也相似于 $\boldsymbol{\Lambda}$．因此 A 相似于 B ．

5.3.5　依题有，$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{\alpha}=\lambda_0\boldsymbol{\alpha}$，因为 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}=-\boldsymbol{E}$，从而有 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{\alpha}=-\boldsymbol{\alpha}=\lambda_0\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}$，即

$$\lambda_0\begin{pmatrix}a&-1&c\\5&b&3\\1-c&0&-a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix},$$

整理可得

$$\begin{cases}\lambda_0(-a+1+c)=1\\ \lambda_0(-5-b+3)=1,\\ \lambda_0(1+a-c)=1\end{cases}$$

由此解出 $\lambda_0=1$，$a=c$，$b=-3$，再由

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}a&-1&c\\5&b&3\\1-c&0&-a\end{vmatrix}=a-3=-1,$$

解得 $a=2$，故 $a=2$，$b=-3$，$c=2$，$\lambda_0=1$．

5.3.6　因为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B}\boldsymbol{\alpha}_1 &= (\boldsymbol{A}^5-4\boldsymbol{A}^3+\boldsymbol{E})\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{A}^5\boldsymbol{\alpha}_1-4\boldsymbol{A}^3\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{E}\boldsymbol{\alpha}_1=\lambda_1^5\boldsymbol{\alpha}_1-4\lambda_1^3\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_1\\ &=(\lambda_1^5-4\lambda_1^3+1)\boldsymbol{\alpha}_1,\end{aligned}$$

所以 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 是矩阵 $\boldsymbol{B}$ 属于 $\lambda_1^5-4\lambda_1^3+1$ 的特征向量，且 $\boldsymbol{B}$ 属于 $\lambda_1^5-4\lambda_1^3+1$ 的全部特征向量为 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1$．

设 $\varphi(\lambda)=\lambda^5-4\lambda^3+1$，则 $\boldsymbol{B}$ 全部特征值为 $\varphi(1)=-2$，$\varphi(2)=1$，$\varphi(-2)=1$．由于 $\boldsymbol{B}$ 是实对称矩阵，属于不同特征值的特征向量是正交的，所以属于 1（二重根）的特征向量与向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,1)^{\mathrm{T}}$ 正交，由此得到全部的特征向量为：

$$k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3=k_2(1,1,0)^{\mathrm{T}}+k_3(0,1,1)^{\mathrm{T}}\quad（k_2,k_3\text{ 不全为零}）.$$

（2）令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=\begin{pmatrix}1&1&0\\-1&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}$，则有 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$．因此

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&1&0\\-1&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&1&-1\\-1&1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&-1\\1&0&1\\-1&1&0\end{pmatrix}.$$

5.3.7　（1）令 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$，由条件可知 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1=-\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_2$，则 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=-1$，$\lambda_2=1$，又因为 $R(\boldsymbol{A})=2$，所以 $\boldsymbol{A}$ 的另一个特征值为 $\lambda_3=0$，且属于 $\lambda_3=0$ 的特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 正交，由此有方程组 $\begin{cases}x_1-x_3=0\\x_1+x_3=0\end{cases}$，解得基础解系为 $\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$，从而 $\boldsymbol{A}$ 的属于 $\lambda_1=-1$，$\lambda_2=1$，$\lambda_3=0$ 的所有特征向量分别为：

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1,\quad k_2\boldsymbol{\alpha}_2,\quad k_3\boldsymbol{\alpha}_3\quad（k_1,k_2,k_3\text{ 均不为零}）.$$

（2）显然 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 为正交向量组，将其单位化得到正交矩阵

$$\boldsymbol{P}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1&1&0\\0&0&\sqrt{2}\\1&1&0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1&0&1\\1&0&1\\0&\sqrt{2}&0\end{pmatrix},$$

使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，则有

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1&1&0\\0&0&\sqrt{2}\\1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0&1\\1&0&1\\0&\sqrt{2}&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}.$$

5.3.8　（1）依题意，由 $|\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}2&-1&1\\-1&k+2&1\\1&1&2\end{vmatrix}=0$，解得 $k=0$．

（2）由于 $\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵，则存在正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$，使得

$$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}\{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\},$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值．而

$$(\boldsymbol{AP})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{AP})=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{P},$$

取 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{Q}$，则

$$(\boldsymbol{AP})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{AP})=\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{\Lambda}^2=\mathrm{diag}\{\lambda_1^2,\lambda_2^2,\lambda_3^2\}.$$

由于

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}-\lambda & -1 & 1\\ -1 & -\lambda & 1\\ 1 & 1 & -\lambda\end{vmatrix}=-(1-\lambda)^2(2+\lambda),$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=-2$，$\lambda_2=\lambda_3=1$．当 $\lambda_1=-2$ 时，解方程组 $(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=0$，解得基础解系 $\boldsymbol{\eta}_1=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$；当 $\lambda_2=\lambda_3=1$ 时，解方程组 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=0$，解得基础解系 $\boldsymbol{\eta}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\eta}_3=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$．将 $\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3$ 正交化，令

$$\boldsymbol{\xi}_2=\boldsymbol{\eta}_2,\quad \boldsymbol{\xi}_3=\boldsymbol{\eta}_3-\frac{[\boldsymbol{\eta}_3,\boldsymbol{\xi}_2]}{[\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_2]}\boldsymbol{\xi}_2=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}.$$

将 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\xi}_2$ 和 $\boldsymbol{\xi}_3$ 单位化，令

$$\boldsymbol{p}_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{p}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{p}_3=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}.$$

因此所求的正交矩阵 $\boldsymbol{P}$ 为

$$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3)=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}}\\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}.$$

5.5　综合提高训练

例 5.5.1　设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵，$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的3个不同的特征值，对应特征向量分别为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$，令向量 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$．

（1）证明 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{Ax},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}$ 线性无关；（2）若 $\boldsymbol{A}^3\boldsymbol{x}=3\boldsymbol{Ax}-2\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}$，求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值及 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|$．

（1）**证**　设 $k_1\boldsymbol{x}+k_2\boldsymbol{Ax}+k_3\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，由已知有

$$k_1(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)+k_2\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)+k_3\boldsymbol{A}^2(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)=\boldsymbol{0},$$

整理得

$$(k_1+\lambda_1k_2+\lambda_1^2k_3)\boldsymbol{\alpha}_1+(k_1+\lambda_2k_2+\lambda_2^2k_3)\boldsymbol{\alpha}_2+(k_1+\lambda_3k_2+\lambda_3^2k_3)\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{0},$$

因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是对应 $\boldsymbol{A}$ 的不同特征值的特征向量，必线性无关，故有齐次方程组

$$\begin{cases}k_1+\lambda_1k_2+\lambda_1^2k_3=0\\k_1+\lambda_2k_2+\lambda_2^2k_3=0,\\k_1+\lambda_3k_2+\lambda_3^2k_3=0\end{cases}$$

由于其系数行列式 $\begin{vmatrix}1&\lambda_1&\lambda_1^2\\1&\lambda_2&\lambda_2^2\\1&\lambda_3&\lambda_3^2\end{vmatrix}\neq0$，所以有 $k_1=k_2=k_3=0$，故得 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{Ax},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}$ 线性无关.

（2）设 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 特征值，则由 $\boldsymbol{A}^3\boldsymbol{x}=3\boldsymbol{Ax}-2\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}$ 易得，λ 必满足 $\lambda^3-3\lambda+2\lambda^2=0$， 解出 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $-3,1,0$，从而 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 的特征值为 $-2,2,1$，故 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|=-4$.

例 5.5.2　【2003（1）】设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&2&2\\2&3&2\\2&2&3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{P}$，求 $\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{E}$ 的特征值与特征向量.

解　由题意

$$\boldsymbol{A}^*=\begin{pmatrix}5&-2&-2\\-2&5&-2\\-2&-2&5\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}0&1&-1\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},$$

进而有

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}0&1&-1\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5&-2&-2\\-2&5&-2\\-2&-2&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&0&0\\-2&5&-4\\-2&-2&3\end{pmatrix},$$

故 $\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{E}$ 特征方程为

$$|(\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{E})-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}9-\lambda&0&0\\-2&7-\lambda&-4\\-2&-2&5-\lambda\end{vmatrix}=(9-\lambda)^2(3-\lambda)=0,$$

所以 $\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{E}$ 的特征值为 $\lambda_1=3,\lambda_2=\lambda_3=9$．当 $\lambda_1=3$ 时，解方程组 $(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，系数矩阵为

$$\begin{pmatrix}6&0&0\\-2&4&-4\\-2&-2&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix},$$

解得基础解系为 $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$，所有属于 $\lambda_1=3$ 的特征向量为 $k_1\boldsymbol{\xi}_1$（$k_1\neq0$）；当 $\lambda_2=\lambda_3=9$ 时，解方

程组 $(\boldsymbol{A}-9\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，系数矩阵为

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & -4 \\ -2 & -2 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

解得基础解系为 $\xi_2=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\xi_3=\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，所有属于 $\lambda_2=\lambda_3=9$ 的特征向量为 $k_2\xi_2+k_3\xi_3$（k_2,k_3 不全为零）.

例 5.5.3　设 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 均为三维单位列向量，且 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=0$，令 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$，证明 $\boldsymbol{A}$ 与 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 相似.

证　由 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=0$，有 $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta})^{\mathrm{T}}=0$，从而有

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta},\quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}=(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha},$$

两式相加得 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$，故 1 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，对应 1 的特征向量是 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$；两式相减得 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})=-(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})$，所以 -1 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，对应 -1 的特征向量是 $\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}$. 又因为

$$R(\boldsymbol{A})\leqslant R(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})+R(\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})=1+1=2,$$

因此 $\boldsymbol{A}$ 不可逆，从而必有特征值 0. 综上所述，实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有三个不同的特征值 $1,-1,0$，所以必和对角矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 相似.

例 5.5.4　已知 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 均为 3 阶矩阵，满足 $\boldsymbol{AB}+2\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$，且 $R(\boldsymbol{B})=2$，其中 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & a & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$，又齐次方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系为 $(1,1,1)^{\mathrm{T}}$. 求：（1）a 的值；（2）可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ 为对角矩阵；（3）$R(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})$；（4）$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|$；（5）$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^{2016}$.

解　（1）利用矩阵的初等变换有

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & a & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & a & -1 \end{pmatrix},$$

因为 $R(\boldsymbol{B})=2$，可得 $a=-2$.

（2）记 $\boldsymbol{B}$ 的第一列、第三列向量分别为 ξ_1,ξ_2，显然 ξ_1,ξ_2 线性无关. 由 $\boldsymbol{AB}+2\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$，即 $\boldsymbol{AB}=-2\boldsymbol{B}$，有 -2 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，且 ξ_1,ξ_2 为属于 -2 的特征向量. 令 $\xi_3=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$，由已知有 $\boldsymbol{A}\xi_3=\boldsymbol{0}=0\xi_3$，故 0 也是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，且 ξ_3 为属于 0 的特征向量. 令 $\boldsymbol{P}=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$，则 $\boldsymbol{P}$ 可逆，且有 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

（3）由 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $-2,-2,0$，有 $\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}$ 的特征值为 $0,0,2$，故 $\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}$ 与 $\mathrm{diag}\{0,0,2\}$ 相似，因此 $R(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})=1$.

（4）由 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $-2,-2,0$，有 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 的特征值为 $-1,-1,1$，所以 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|=1$.

（5）由（4）有 $\boldsymbol{P}^{-1}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\boldsymbol{P}=\mathrm{diag}\{-1,-1,1\}$，进而有

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^{2016}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}^{2016}\boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{PEP}^{-1}=\boldsymbol{E}.$$

例 5.5.5　设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&a&\cdots&a\\a&1&\cdots&a\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a&a&\cdots&1\end{pmatrix}$.

（1）求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值和特征向量；（2）求可逆矩阵使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ 为对角矩阵.

解　（1）当 $a\neq 0$ 时，由

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}1-\lambda&a&\cdots&a\\a&1-\lambda&\cdots&a\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a&a&\cdots&1-\lambda\end{vmatrix}=[1+(n-1)a-\lambda][1-a-\lambda]^{n-1},$$

有 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=1+(n-1)a$，$\lambda_2=1-a$（$n-1$ 重根）．当 $\lambda_1=1+(n-1)a$ 时，解方程组 $(\boldsymbol{A}-\lambda_1\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，由矩阵的初等变换有

$$(\boldsymbol{A}-\lambda_1\boldsymbol{E})=\begin{pmatrix}(1-n)a&a&\cdots&a\\a&(1-n)a&\cdots&a\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a&a&\cdots&(1-n)a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}(1-n)&1&\cdots&1\\1&(1-n)&\cdots&1\\\vdots&\vdots&&\vdots\\1&1&\cdots&(1-n)\end{pmatrix},$$

$$\to\begin{pmatrix}n&-n&0&0&\cdots&0&0\\0&n&-n&0&\cdots&0&0\\0&0&n&-n&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&0&\cdots&-n&0\\0&0&0&0&\cdots&n&-n\\1&1&1&1&\cdots&1&1-n\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&0&0&\cdots&0&0\\0&1&-1&0&\cdots&0&0\\0&0&1&-1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&0&\cdots&-1&0\\0&0&0&0&\cdots&1&-1\\0&0&0&0&\cdots&0&0\end{pmatrix},$$

得到基础解系为 $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}$，属于 $\lambda_1=1+(n-1)a$ 的特征向量为 $k_1\boldsymbol{\xi}_1$（$k_1\neq 0$）．当 $\lambda_2=1-a$ 时，解方程组 $(\boldsymbol{A}-\lambda_2\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，由矩阵的初等变换有

$$(\boldsymbol{A}-\lambda_2\boldsymbol{E})=\begin{pmatrix} a & a & \cdots & a \\ a & a & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & a \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

得基础解系为 $\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$，…，$\boldsymbol{\xi}_n=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$，属于 $\lambda_2=1-a$ 的特征向量为 $k_2\boldsymbol{\xi}_2+k_3\boldsymbol{\xi}_3+\cdots+k_n\boldsymbol{\xi}_n$（$k_2,k_3,\cdots,k_n$ 不全为零）. 当 $a=0$ 时，$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=1$（n 重根），任意的非零列向量都是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量.

（2）由（1）有，当 $a\neq 0$ 时，$\boldsymbol{A}$ 有 n 个线性无关的列向量

$$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\quad \cdots,\quad \boldsymbol{\xi}_n=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

构造矩阵 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_n)$，则

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} 1+(n-1)a & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1-a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-a \end{pmatrix},$$

当 $a=0$ 时，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$，对任意的可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 都有 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{E}$.

第 6 章 二 次 型

6.1 知 识 要 点

6.1.1 二次型及其矩阵表示

n 个变元 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的二次齐次多项式

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \cdots + 2a_{n-1,\,n}x_{n-1}x_n$$

称为 n **元二次型**．当系数 a_{ij} $(i, j = 1, 2, \cdots, n)$ 为实数时，称 f 为**实二次型**．

若记 $a_{ji} = a_{ij}$ $(i < j)$，则 $2a_{ij}x_ix_j = a_{ij}x_ix_j + a_{ji}x_jx_i$，二次型可写为

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j = (x_1, x_2, \cdots, x_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x},$$

其中

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 称为**二次型 f 的矩阵**，其主对角线元素 a_{ii} $(i = 1, 2, \cdots, n)$ 等于平方项 x_i^2 的系数，其他元素 a_{ij} $(i \neq j)$ 等于交叉项 x_ix_j 系数的一半．矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $R(\boldsymbol{A})$ 称为**二次型 f 的秩**．

二次型 f 与对称阵 $\boldsymbol{A}$ 之间存在一一对应关系，即任给一个二次型 f，就唯一地确定一个对称阵 $\boldsymbol{A}$；反之，亦然．

6.1.2 二次型的标准形与规范形

从变元 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 到变元 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的一个**线性变换**可表示为

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + \cdots + c_{1n}y_n \\ x_2 = c_{21}y_1 + c_{22}y_2 + \cdots + c_{2n}y_n \\ \qquad\cdots \\ x_n = c_{n1}y_1 + c_{n2}y_2 + \cdots + c_{nn}y_n \end{cases},$$

该线性变换的矩阵形式为 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$，其中的

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}c_{11}&c_{12}&\cdots&c_{1n}\\c_{21}&c_{22}&\cdots&c_{2n}\\\cdots&\cdots&&\cdots\\c_{n1}&c_{n2}&\cdots&c_{nn}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}.$$

若矩阵 $\boldsymbol{C}$ 为可逆矩阵，则称线性变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Cy}$ 为**可逆变换**；若 $\boldsymbol{C}$ 为正交矩阵，称线性变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Cy}$ 为**正交变换**.

将线性变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Cy}$ 代入二次型 $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}$ 中，有

$$f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}=(\boldsymbol{Cy})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{Cy})=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AC})\boldsymbol{y}\overset{\text{记为}}{=\!=}\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{By}=g(\boldsymbol{y}),$$

其中， $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AC}$. 可以证明：当 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Cy}$ 为可逆的线性变换时， $g(\boldsymbol{y})=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{By}$ 仍为二次型，并且 $\boldsymbol{B}$ 为该二次型的矩阵.

n 元二次型 f 经可逆的线性变换可化为只含平方项的形式：

$$d_1y_1^2+d_2y_2^2+\cdots+d_ny_n^2,$$

称其为二次型 f 的**标准形**，也可以经可逆的线性变换化为更简单的列式：

$$y_1^2+\cdots+y_p^2-y_{p+1}^2-\cdots-y_r^2,$$

称其为二次型 f 的**规范形**. 其中的 r 为二次型 f 的秩.

注　二次型的标准形不唯一，它与可逆线性变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Cy}$ 有关. 规范形是二次型的一个特殊的标准形.

6.1.3　矩阵的合同

对于 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ ，若存在可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$ ，使得 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{B}$ ，则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ **合同**. 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同关系是一种等价关系，具有下列性质：

（1）**反身性**　$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 合同；

（2）**对称性**　若 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同，则 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 合同；

（3）**传递性**　若 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同， $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 合同，则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 合同.

在二次型的化简中，线性变换前后两个二次型的矩阵是合同的. 将二次型 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}$ 采用可逆的线性变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Cy}$ 化为标准形，等同于用矩阵 $\boldsymbol{C}$ 使 $\boldsymbol{A}$ 合同于对角阵 $\boldsymbol{\Lambda}$，即 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{\Lambda}$.

矩阵合同的性质：

（1）设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同，若 $\boldsymbol{A}$ 为对称阵，则 $\boldsymbol{B}$ 也为对称阵；

（2）若 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同，则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的秩相同，即 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})$ ；

（3）矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同的充分必要条件为对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行和列实施相同的初等变换变成 $\boldsymbol{B}$.

6.1.4　利用正交变换化二次型为标准形

设 $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵，则存在正交阵 $\boldsymbol{P}$ ，使得

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\},$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 为二次型矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值. 即正交阵 $\boldsymbol{P}$ 使矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与对角阵 $\boldsymbol{\Lambda}$ 既相似又合同. 相应地，对于二次型 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}$ ，总有正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Py}$ 使

$$f = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{y} = \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2 .$$

利用正交变换化二次型为标准形的步骤如下：

设 n 元二次型为 $f = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\quad(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A})$.

（1）求解矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$，相应的重数记为 $r_1, r_2, \cdots, r_s$.

（2）对每个特征值 λ_i 求解齐次线性方程组 $(\boldsymbol{A} - \lambda_i \boldsymbol{E})\boldsymbol{x} = 0$ 的基础解系，并将其正交化、单位化得到 $\boldsymbol{\alpha}_{i1}, \boldsymbol{\alpha}_{i2}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{i,r_i}$.

（3）以向量 $\boldsymbol{\alpha}_{i1}, \boldsymbol{\alpha}_{i2}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{i,r_i}\ (i = 1, 2, \cdots, s)$ 为列向量构成矩阵 $\boldsymbol{P}$，则 $\boldsymbol{P}$ 为正交矩阵，变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ 为正交变换，在此变换下二次型 f 的标准型为

$$f(\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{y} = \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2 ,$$

其中，$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值（这里可能有重根）.

6.1.5　用配方法化二次型成标准型

除了使用正交变换方法外，还有一些其他的方法将二次型化为标准形，如配方法、初等变换法等．这里我们只讨论利用配方法化二次型为标准型．配方法的使用分为以下两种情形．

（1）二次型中同时含有平方项和非平方项，如 $f = x_1^2 - 3x_2^2 + 2x_1x_2 + 6x_1x_3$．对于此种类型，首先对含有平方项的第一个变元（如 x_1）进行完全平方，使得余下的项中不再含有这个变元，然后再对含有平方项的第二个变元（如 x_2）进行类似操作，以此类推．注意每次只对一个变元进行配方．

（2）二次型中不含有平方项，如 $f = x_1x_2 - 2x_1x_3 + 8x_2x_3$．对于此种类型，首先需要使用平方差公式制造平方项，然后转化为（1）. 如本题可以作变换 $\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 \\ x_2 = y_1 - y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$，这样 f 可化为 $f = y_1^2 - y_2^2 + 6y_1y_3 - 10y_2y_3$.

6.1.6　惯性定理

前面我们提到二次型的标准形是不唯一的，但标准形中所含有的项数是确定的，并且标准形中正系数的个数也是确定的（从而负系数的个数也是确定的），与所作可逆变换无关，这个结论称为**惯性定理**，即对于秩为 r 的 n 元二次型 $f = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$，存在两个可逆变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{y}$ 和 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{z}$，使得

$$f = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_k y_k^2 ,\ (\ \lambda_i \neq 0, i = 1, 2, \cdots, k\ )$$

及

$$f = d_1 z_1^2 + d_2 z_2^2 + \cdots + d_s z_s^2 ,\ (\ d_i \neq 0, i = 1, 2, \cdots, s\ ),$$

则 $k = s = r$，且 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r$ 中正数的个数与 $d_1, d_2, \cdots, d_r$ 中正数的个数相等.

二次型标准形中的正系数的个数称为**正惯性指数**，负系数的个数称为**负惯性指数**．若 n 元二次型 $f = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的秩为 r，正惯性指数为 p，则 f 的规范形可以表示为

$$f = y_1^2 + \cdots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \cdots - y_r^2 .$$

类似地，对于 n 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$，存在可逆阵 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{Q}$，使得

$$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_p & & \\ & -\boldsymbol{E}_{r-p} & \\ & & \boldsymbol{O}_{n-r}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_q & & \\ & -\boldsymbol{E}_{r-q} & \\ & & \boldsymbol{O}_{n-r}\end{pmatrix},$$

则 $p=q$．因此两个 n 阶实对称阵合同的充要条件是它们的秩相等、正惯性指数也相等.

6.1.7　正定二次型与正定矩阵

n 元二次型 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$，若对任意的 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$ 都有 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}>0\ (<0)$，则称 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 为**正定**（**负定**）**二次型**，并称对称阵 $\boldsymbol{A}$ 为**正定矩阵**（**负定矩阵**）；若对任意的 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$ 都有 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\geqslant 0\ (\leqslant 0)$，则称 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 为半正定（半负定）二次型，并称对称阵 $\boldsymbol{A}$ 为**半正定矩阵**（**半负定矩阵**）.

正定二次型的一些常用结论：

（1）n 元二次型 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 为正定的充要条件是它的正惯性指数为 n；

（2）正定二次型经可逆变换得到的二次型仍为正定的；

（3）对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 正定的充要条件是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值全为正数；

（4）对称阵 $\boldsymbol{A}$ 正定的充要条件是 $\boldsymbol{A}$ 与单位阵 $\boldsymbol{E}$ 合同，即存在可逆阵 $\boldsymbol{C}$，使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}$.

半正定二次型的一些常用结论：

（1）秩为 r 的 n 元二次型 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 为半正定的充要条件是正惯性指数 $p=r<n$；

（2）n 阶对称阵 $\boldsymbol{A}$ 半正定的充要条件是 $\boldsymbol{A}$ 与 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_r & \\ & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$ 合同（$r=R(\boldsymbol{A})<n$）；

（3）n 阶对称阵 $\boldsymbol{A}$ 半正定的充要条件是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值大于或等于零.

6.1.8　顺序主子式

设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶对称矩阵，子式 $D_i=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ii}\end{vmatrix}$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**顺序主子式**.

n 阶对称阵 $\boldsymbol{A}$ 正定的充要条件是 $\boldsymbol{A}$ 的顺序主子式 $D_i\ (i=1,2,\cdots,n)$ 均大于 0；$\boldsymbol{A}$ 负定的充要条件是 $\boldsymbol{A}$ 的奇数阶顺序主子式为负，偶数阶顺序主子式为正，即 $(-1)^i D_i>0$，$i=1,2,\cdots,n$.

6.2　典型例题分析

6.2.1　题型一、二次型的基本概念问题

例 6.2.1　求二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)^2$ 的矩阵.

解　由题意

$$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}(a_1,a_2,a_3)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}a_1^2 & a_1a_2 & a_1a_3\\a_1a_2 & a_2^2 & a_2a_3\\a_1a_3 & a_2a_3 & a_3^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix},$$

因此二次型对应的矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_1^2 & a_1a_2 & a_1a_3\\a_1a_2 & a_2^2 & a_2a_3\\a_1a_3 & a_2a_3 & a_3^2\end{pmatrix}.$$

例 6.2.2 求二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2-x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$ 的秩.

解 由题意，对二次型矩阵 $\boldsymbol{A}$ 进行初等变换有

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix},$$

因此 $R(\boldsymbol{A})=2$，故二次型 f 的秩为 2 .

6.2.2 题型二、将二次型化为标准型

例 6.2.3 【2011（2）】二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+3x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$，则 f 的正惯性指数为________.

解法 1 由配方法

$$\begin{aligned}f(x_1,x_2,x_3)&=x_1^2+3x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3\\&=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3+2x_2^2=(x_1+x_2+x_3)^2+2x_2^2,\end{aligned}$$

故令

$$\begin{cases}y_1=x_1+x_2+x_3\\y_2=x_2\\y_3=x_3\end{cases},\quad 即\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix},$$

从而有可逆的线性变换

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix},$$

使得二次型化为标准形 $f=y_1^2+2y_2^2$，所以 f 正惯性指数为 2 .

解法 2 二次型矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程为

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}1-\lambda&1&1\\1&3-\lambda&1\\1&1&1-\lambda\end{vmatrix}=(-\lambda)(1-\lambda)(4-\lambda),$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=4$，$\lambda_3=0$，因此 f 正惯性指数为 2 .

例 6.2.4 【2012（1，2，3）】已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\-1&0&a\\0&a&-1\end{pmatrix}$，二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}$ 的秩为 2．求：（1）实数 a 的值；（2）正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 将 f 化成标准形．

解 （1）因为 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})=2$，对 $\boldsymbol{A}$ 作初等变换

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\-1&0&a\\0&a&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&a+1\\0&a+1&0\end{pmatrix},$$

故得 $a=-1$；

（2）由于

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&1&0&-1\\1&1&-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\-1&0&-1\\0&-1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&2\\0&2&2\\2&2&4\end{pmatrix},$$

特征方程为

$$|\boldsymbol{B}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}2-\lambda&0&2\\0&2-\lambda&2\\2&2&4-\lambda\end{vmatrix}=(-\lambda)(2-\lambda)(6-\lambda),$$

所以 $\boldsymbol{B}$ 的特征值为 $\lambda_1=2$，$\lambda_2=6$，$\lambda_3=0$．当 $\lambda_1=2$ 时，求解方程组 $(\boldsymbol{B}-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=0$，基础解系为 $\boldsymbol{\eta}_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$，单位化为 $\boldsymbol{\gamma}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$；当 $\lambda_2=6$ 时，求解方程组 $(\boldsymbol{B}-6\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=0$，基础解系为 $\boldsymbol{\eta}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$，单位化为 $\boldsymbol{\gamma}_2=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$；当 $\lambda_3=0$ 时，求解方程组 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=0$，基础解系为 $\boldsymbol{\eta}_3=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$，单位化为 $\boldsymbol{\gamma}_3=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$．取

$$\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3)=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&-\frac{1}{\sqrt{3}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&-\frac{1}{\sqrt{3}}\\0&\frac{2}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix},$$

则 $\boldsymbol{Q}$ 为正交矩阵，正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 将 f 化为标准形 $f=2y_1^2+6y_2^2$．

6.2.3　题型三、二次型的规范形的求解

例 6.2.5　将二次型

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1^2+x_2^2+x_3^2-2x_4^2-2x_1x_2+2x_1x_3-2x_1x_4+2x_2x_3-4x_2x_4$$

化成规范形，并写出所用的可逆线性变换.

解　利用配方法有

$$\begin{aligned}f(x_1,x_2,x_3,x_4)&=(x_1-x_2+x_3-x_4)^2-3x_4^2+4x_2x_3-6x_2x_4+2x_3x_4\\&=(x_1-x_2+x_3-x_4)^2-3\left(x_4^2+2x_2x_4-\frac{2}{3}x_3x_4+x_2^2+\frac{1}{9}x_3^2-\frac{2}{3}x_2x_3\right)+3x_2^2+2x_2x_3+\frac{1}{3}x_3^2\\&=\left(x_1-x_2+x_3-x_4\right)^2+3\left(x_2+\frac{1}{3}x_3\right)^2-3\left(x_2-\frac{1}{3}x_3+x_4\right)^2,\end{aligned}$$

令线性变换

$$\begin{cases}y_1=x_1-x_2+x_3-x_4\\y_2=x_2+\dfrac{1}{3}x_3\\y_3=x_2-\dfrac{1}{3}x_3+x_4\\y_4=x_4\end{cases}，得\begin{cases}x_1=y_1-y_2+2y_3-y_4\\x_2=\dfrac{1}{2}y_2+\dfrac{1}{2}y_3-\dfrac{1}{2}y_4\\x_3=\dfrac{3}{2}y_2-\dfrac{3}{2}y_3+\dfrac{3}{2}y_4\\x_4=y_4\end{cases},$$

即

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&2&-1\\0&\dfrac{1}{2}&\dfrac{1}{2}&-\dfrac{1}{2}\\0&\dfrac{3}{2}&-\dfrac{3}{2}&\dfrac{3}{2}\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{pmatrix},$$

此时 $f=y_1^{\ 2}+3y_2^2-3y_3^2$．再作线性变换

$$\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&\dfrac{1}{\sqrt{3}}&0&0\\0&0&\dfrac{1}{\sqrt{3}}&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}t_1\\t_2\\t_3\\t_4\end{pmatrix},$$

其规范形为 $f=t_1^{\ 2}+t_2^2-t_3^2$，线性变换为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{3}} & -1 \\ 0 & \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \end{pmatrix}.$$

6.2.4　题型四、矩阵的合同、相似问题

例 6.2.6　设 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. 证明矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同，但 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 不相似.

解　由于

$$|\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E}| = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & -2-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)(-2-\lambda)(-3-\lambda),$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = -3$. 矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1$，因此矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 不相似. 又因为 $R(\boldsymbol{A}) = R(\boldsymbol{B}) = 3$，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 正惯性指数均为 0，因此 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同.

注　两个同阶对称矩阵合同的充要条件为二者具有相同的秩和相同的正惯性指数；两个同阶对称矩阵相似的充要条件为二者具有相同的特征值及重数.

例 6.2.7　【2008（3）】设 $\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$，则下列矩阵与 $\boldsymbol{P}$ 合同的是（　　）.

（A）$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$；　（B）$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$；　（C）$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$；　（D）$\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

解　由于

$$|\boldsymbol{P} - \lambda \boldsymbol{E}| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)(3-\lambda),$$

因此矩阵 $\boldsymbol{P}$ 的特征值为 $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 3$. 从而 $R(\boldsymbol{P}) = 2$，正惯性指数为 1. 计算四个选项中矩阵的特征多项式有

$$|\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E}| = (1+\lambda)(3+\lambda)；\quad |\boldsymbol{B} - \lambda \boldsymbol{E}| = (1-\lambda)(3-\lambda)；$$

$$|\boldsymbol{C} - \lambda \boldsymbol{E}| = (1-\lambda)(3-\lambda)；\quad |\boldsymbol{D} - \lambda \boldsymbol{E}| = (-1-\lambda)(3-\lambda).$$

从上述四个矩阵的特征多项式可以看到，只有矩阵 $\boldsymbol{D}$ 的秩 $R(\boldsymbol{D}) = 2$，正惯性指数为 1，因此答案选（D）.

6.2.5　题型五、二次型（或二次型矩阵）正定性的判定

判定矩阵是否正定，应先检验该矩阵是否对称．二次型（或对称矩阵）正定性（或负定性）的判定，常用的方法有顺序主子式法、定义法、特征值法及矩阵的合同法等．

例 6.2.8　设对称矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 1\\ 0 & -2 & 0\\ 1 & 0 & -2\end{pmatrix}$，判别矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的正定性．

解　由于

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}-2-\lambda & 0 & 1\\ 0 & -2-\lambda & 0\\ 1 & 0 & -2-\lambda\end{vmatrix}=(-1-\lambda)(-2-\lambda)(-3-\lambda),$$

有 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=-1, \lambda_2=-2, \lambda_3=-3$，因此 $\boldsymbol{A}$ 是负定的．

注　本例使用了特征值法来判定矩阵的正定性（或负定性）．一般来说，使用顺序主子式方法只需计算几个行列式的值，相对来说，比求解特征多项式 $|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=0$ 要简单些．

例 6.2.9　若 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 均为正定矩阵，判定 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 的正定性．

解　由于 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 均为正定矩阵，因此 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 均为对称矩阵，故 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 也为对称矩阵．而由 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的正定性，对任意的 n 维向量 $\boldsymbol{x}\neq 0$，均有 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}>0$，$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}>0$，因此对任意的 $\boldsymbol{x}\neq 0$，有

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}>0,$$

故 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 为正定矩阵．

注　（1）一般的，对于任意的正数 k_1, k_2，若 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 均为正定矩阵，则 $k_1\boldsymbol{A}+k_2\boldsymbol{B}$ 也为正定矩阵．

（2）本例使用了正定性的定义来判定二次型（或二次型矩阵）的正定性．

例 6.2.10　若 $\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵，讨论逆矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的正定性．

解法 1　由 $\boldsymbol{A}$ 正定，有 $|\boldsymbol{A}|>0$，从而 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 存在．设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$，由于 $\boldsymbol{A}$ 正定，有 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 全大于零，故 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的全部特征值 $\lambda_1^{-1}, \lambda_2^{-1}, \cdots, \lambda_n^{-1}$ 全大于零，因此 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 正定．

解法 2　由 $\boldsymbol{A}$ 正定，有 $\boldsymbol{A}$ 与单位阵 $\boldsymbol{E}$ 合同，即存在可逆阵 $\boldsymbol{C}$，使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}\boldsymbol{C}$．从而有

$$\boldsymbol{A}^{-1}=(\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}\boldsymbol{C})^{-1}=\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}})^{-1}=\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{C}^{-1})^{\mathrm{T}}=[(\boldsymbol{C}^{-1})^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{C}^{-1})^{\mathrm{T}},$$

即 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 与单位阵 $\boldsymbol{E}$ 合同，故 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 正定．

注　本例使用了特征值法和矩阵的合同法来判定矩阵的正定性．

6.2.6　题型六、二次型的参数求解问题

例 6.2.11　已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3)=x_1^2+ax_2^2+4x_3^2+4x_1x_2-2x_1x_3+2x_2x_3$ 的秩为 2，求常数 a 的值．

解　设二次型矩阵为 $\boldsymbol{A}$，由矩阵的初等变换有

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & a & 1\\ -1 & 1 & 4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & a-2 & 3\\ 0 & 3 & 3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & 3 & 3\\ 0 & a-2 & 3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & 3 & 3\\ 0 & a-5 & 0\end{pmatrix},$$

由题意 $R(A)=2$，因此 $a=5$.

例 6.2.12 【2009（2）】设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=ax_1^2+ax_2^2+(a-1)x_3^2+2x_1x_3-2x_2x_3$，（1）求二次型 f 的矩阵的所有特征值；（2）若二次型 f 的规范性为 $y_1^2+y_2^2$，求 a 的值.

解 （1）二次型 f 的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & a & -1 \\ 1 & -1 & a-1 \end{pmatrix}$，其特征方程为

$$\left|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}\right|=\begin{vmatrix} a-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & a-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & a-1-\lambda \end{vmatrix}=(a-\lambda)[(a+1)-\lambda][(a-2)-\lambda]=0,$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=a,\lambda_2=a+1,\lambda_3=a-2$.

（2）因为 f 的规范性为 $y_1^2+y_2^2$，所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值有两个正数，一个为零. 又因为 $a-2<a<a+1$，所以 $a=2$.

6.2.7 题型七、二次型（二次型矩阵）的证明问题

例 6.2.13 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶正定矩阵，证明 $\left|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}\right|>1$.

证 设 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，则 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 的特征值为 $\lambda_1+1,\lambda_2+1,\cdots,\lambda_n+1$. 由于 $\boldsymbol{A}$ 正定，因此 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 全部大于零，故 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 的特征值全部大于1，因此

$$\left|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}\right|=(\lambda_1+1)(\lambda_2+1)\cdots(\lambda_n+1)>1.$$

例 6.2.14 若 n 阶对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2-4\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E}=0$，则 $\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵.

证 由题意，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 λ 满足方程 $\lambda^2-4\lambda+3=0$，解得 $\lambda_1=1$ 或 $\lambda_2=3$，即矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值全部为正，因此 $\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵.

6.3 深 化 训 练

6.3.1 填空题

（1）3 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足方程 $\boldsymbol{A}^3+7\boldsymbol{A}^2+16\boldsymbol{A}+10\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$，则二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 经正交变换可化成标准形为________.

（2）【2011（1）】若二次曲面的方程 $x^2+3y^2+z^2+2axy+2xz+2yz=4$ 经正交变换化为 $y_1^2+4z_1^2=4$，则 $a=$________.

（3）【2014（1，2，3）】设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-x_2^2+2ax_1x_3+4x_2x_3$ 的负惯性指数为1，则 a 的取值范围为________.

（4）已知 n 元二次型 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 正定，其正惯性指数为 p，秩为 r，则 r,p,n 三者间的关系为________.

（5）若 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+4x_3^2-tx_2x_3$ 为正定二次型，则 t 的范围为________.

（6）设 3 元二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)(b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3)$，则二次型矩阵 $\boldsymbol{A}=$________.

6.3.2　单项选择题

（1）实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+kx_2^2+2x_1x_2+3x_3^2$，当 $k=$（　　）时，其秩为 2.

（A）0；　（B）1；　（C）2；　（D）3.

（2）【2007（1，2，3）】设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$（　　）.

（A）合同且相似；　（B）合同但不相似；

（C）不合同但相似；　（D）既不合同也不相似.

（3）与 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&2\\0&2&0\end{pmatrix}$ 合同的矩阵是（　　）.

（A）$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&9\end{pmatrix}$；（B）$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$；（C）$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$；（D）$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

（4）【2016（1，2，3）】设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=a(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$ 的正、负惯性指数分别为 $1,2$，则（　　）.

（A）$a>1$；　（B）$a<-2$；

（C）$-2<a<1$；　（D）$a=1$ 或 $a=-2$.

（5）实二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 为正定的充分必要条件为（　　）.

（A）$|\boldsymbol{A}|>0$；

（B）存在 n 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$，使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}$；

（C）负惯性指数为零；

（D）存在非零向量 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$，使得 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}>0$.

（6）n 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵的充分必要条件为（　　）.

（A）$\boldsymbol{A}$ 的所有 k 阶子式为正；　（B）$\boldsymbol{A}$ 的所有的特征值非负；

（C）$\boldsymbol{A}^{-1}$ 为正定矩阵；　（D）$R(\boldsymbol{A})=n$.

（7）设 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 为 n 阶实对称矩阵，且都正定，那么 $\boldsymbol{AB}$ 是（　　）.

（A）实对称矩阵；　（B）正定矩阵；　（C）可逆矩阵；　（D）正交矩阵.

6.3.3　【2003（3）】设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=ax_1^2+2x_2^2-2x_3^2+2bx_1x_3$，这里 $b>0$，且二次型的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值之和为 1，特征值之积为 -12.

（1）求 a,b 的值；（2）用正交变换将 f 化成标准形，写出正交变换和对应的正交矩阵.

6.3.4　【1998（1，3）】设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$，矩阵 $\boldsymbol{B}=(k\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^2$，其中 k 是实数，$\boldsymbol{E}$ 是单位矩阵，求对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$，使得 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{\Lambda}$ 相似，并求 k 为何值时，$\boldsymbol{B}$ 为正定矩阵.

6.3.5　设 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶对称矩阵，证明 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同的充分必要条件是二次型 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 与二次型 $g=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{y}$ 具有相同的秩与正惯性指数.

6.4　深化训练详解

6.3.1　填空题

（1）$2y_1^2-y_2^2-5y_3^2$．**提示**　由题意，设λ为$\boldsymbol{A}$的特征值，则λ满足方程

$$\lambda^3+7\lambda^2+16\lambda+10=(\lambda-2)(\lambda+1)(\lambda+5)=0,$$

解得特征值为$2,-1,-5$．

（2）-1．**提示**　由题意，二次型$f(x,y,z)=x^2+3y^2+z^2+2axy+2xz+2yz$可经正交变换化为$f=y_1^2+4z_1^2$，从而该二次型的矩阵为$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&a&1\\a&3&1\\1&1&1\end{pmatrix}$有特征值$1,4,0$，故

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1&a&1\\a&3&1\\1&1&1\end{vmatrix}=-a^2-2a-1=1\times4\times0=0,$$

由此解得$a=-1$．

（3）$[-2,2]$．提示　由配方法有

$$\begin{aligned}f(x_1,x_2,x_3)&=x_1^2+2ax_1x_3+a^2x_3^2-x_2^2+4x_2x_3-4x_3^2+(4-a^2)x_3^2\\&=(x_1+ax_3)^2-(x_2-4x_3)^2+(4-a^2)x_3^2,\end{aligned}$$

由于负惯性指数为1，所以$4-a^2\geqslant0$，所以a的取值范围是$[-2,2]$．

（4）$r=p=n$．　　（5）$-4<t<4$．

（6）$\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}(b_1,b_2,b_3)+\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}(a_1,a_2,a_3)$．提示　由于

$$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}(b_1,b_2,b_3)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix},$$

注意到二次型矩阵为对称矩阵，因此二次型矩阵

$$\boldsymbol{A}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}(b_1,b_2,b_3)+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}(a_1,a_2,a_3).$$

6.3.2　单项选择题

（1）（B）．**提示**　$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&k&0\\0&0&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0\\0&k-1&0\\0&0&3\end{pmatrix}$．

（2）（B）．**提示**　由于

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}2-\lambda&-1&-1\\-1&2-\lambda&-1\\-1&-1&2-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda(3-\lambda)^2,$$

可得矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $3,3,0$，而 $\boldsymbol{B}$ 的特征值为 $1,1,0$，故 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同，而 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})\neq\mathrm{tr}(\boldsymbol{B})$，则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 不相似.

（3）（B）．**提示**　由

$$\left|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}\right|=\begin{vmatrix}1-\lambda & 0 & 0\\ 0 & -\lambda & 2\\ 0 & 2 & -\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)(2-\lambda)(2+\lambda),$$

有 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $1,2,-2$.

（4）（C）．**提示**　设二次型矩阵为 $\boldsymbol{A}$，则 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程为

$$\left|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}\right|=\begin{vmatrix}a-\lambda & 1 & 1\\ 1 & a-\lambda & 1\\ 1 & 1 & a-\lambda\end{vmatrix}=[(a+2)-\lambda][(a-1)-\lambda]^2=0,$$

解得特征值为 $a+2,a-1,a-1$. 又因为其正、负惯性指数分别为 $1,2$，则有 $a+2>0$，$a-1<0$，即 $-2<a<1$.

（5）（B）．**提示**　A，C，D 均为必要条件；当 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}$ 时，对任意 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$，有

$$f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C})\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{C}\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{C}\boldsymbol{x})>0 .$$

（6）（C）．**提示**　见例 6.2.10.　　　　　　（7）C.

6.3.3　（1）二次型的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a & 0 & b\\ 0 & 2 & 0\\ b & 0 & -2\end{pmatrix}$，由题意有 $\begin{cases}1=\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})=a+2-2\\ -12=\left|\boldsymbol{A}\right|-4a-2b^2\end{cases}$，解得 $a=1,b=2$.

（2）由于 $\boldsymbol{A}$ 特征多项式为

$$\left|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}\right|=\begin{vmatrix}1-\lambda & 0 & 2\\ 0 & 2-\lambda & 0\\ 2 & 0 & -2-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)^2(3+\lambda),$$

从而 $\boldsymbol{A}$ 特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=2,\lambda_3=-3$.

当 $\lambda_1=\lambda_2=2$ 时，解方程组 $(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，得基础解系为 $\boldsymbol{\eta}_1=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\eta}_2=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$（$\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2$ 恰巧正交），将其规范化得 $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\xi}_2=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$；

当 $\lambda_3=-3$ 时，解方程组 $(\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，得基础解系为 $\boldsymbol{\eta}_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}$，将其规范化得 $\xi_3=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}$，令

$$P=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}0&2&-1\\\sqrt{5}&0&0\\0&1&2\end{pmatrix},$$

则 $\boldsymbol{P}$ 为正交矩阵，正交变换为 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Py}$ ，且二次型的标准形为 $f=2y_1^2+2y_2^2-3y_3^2$.

6.3.4　由于

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}1-\lambda&0&1\\0&2-\lambda&0\\1&0&1-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda(2-\lambda)^2,$$

有 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=2,\lambda_3=0$. 因为 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵，故必存在正交矩阵 $\boldsymbol{P}$ ，使得

$$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

从而有 $\boldsymbol{B}=(k\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^2$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=(k+2)^2,\lambda_3=k^2$ ，并且

$$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{BP}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{BP}=\begin{pmatrix}(k+2)^2&0&0\\0&(k+2)^2&0\\0&0&k^2\end{pmatrix},$$

由此得对角矩阵

$$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}(k+2)^2&0&0\\0&(k+2)^2&0\\0&0&k^2\end{pmatrix}.$$

再由 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{\Lambda}$ 合同，有当 $k\neq-2$ ，且 $k\neq0$ 时， $\boldsymbol{B}$ 为正定矩阵.

6.3.5　必要性．若 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同，则存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ ，使得 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AP}$. 则

$$g=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{By}=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AP})\boldsymbol{y}=(\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{A}(\boldsymbol{Py})=(\boldsymbol{Py})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{Py}),$$

即二次型 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}$ 经过可逆线性变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Py}$ 化为 $g=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{By}$ ，根据惯性定理， f 与 g 具有相同的秩与正惯性指数.

充分性．若 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}$ 与 $g=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{By}$ 具有相同的秩与正惯性指数，根据惯性定理，经过线性变换后 f 与 g 具有相同的规范形．即存在可逆矩阵线性变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Cz}$ 和 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{Dz}$ ，使得

$$f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}=(\boldsymbol{Cz})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{ACz}=z^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{ACz},$$

$$g=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{By}=(\boldsymbol{Dz})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{BDz}=z^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{BDz},$$

且对任意的 n 维向量 $\boldsymbol{z}$ ，都有 $\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{ACz}=\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{BDz}$. 故有 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{BD}$. 由于 $\boldsymbol{D}$ 可逆，因此

$$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{ACD}^{-1}=(\boldsymbol{D}^{-1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{ACD}^{-1}=(\boldsymbol{CD}^{-1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{ACD}^{-1},$$

由于 $\boldsymbol{CD}^{-1}$ 可逆，因此矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同，结论得证.

6.5　综合提高训练

例 6.5.1　【2004（3）】二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_1+x_3)^2$ 的秩为______.

解　由于

$$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_1+x_3)^2$$
$$=2x_1^2+2x_2^2+2x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3,$$

有二次型矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&-1\\1&-1&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&-3&3\\0&0&0\end{pmatrix},$$

故二次型的秩为 2 .

例 6.5.2　【2015（1，3）】设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ 下的标准形为 $2y_1^2+y_2^2-y_3^2$，其中 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)$．若 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{e}_1,-\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_2)$，则 $f(x_1,x_2,x_3)$ 在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 下的标准形为（　　）.

（A）$2y_1^2-y_2^2+y_3^2$；　（B）$2y_1^2+y_2^2-y_3^2$；

（C）$2y_1^2-y_2^2-y_3^2$；　（D）$2y_1^2+y_2^2+y_3^2$.

解　由线性变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ 得，

$$f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})\boldsymbol{y}=2y_1^2+y_2^2-y_3^2,$$

其中 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$，因为

$$\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{e}_1,-\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_2)=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix},$$

由线性变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$, 得

$$f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q})\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix}\boldsymbol{y}$$
$$=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\boldsymbol{y}$$
$$=2y_1^2-y_2^2+y_3^2.$$

故选（A）.

例 6.5.3　【2001（3）】设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 为实对称矩阵，且 $R(\boldsymbol{A})=n$，A_{ij} 是 $\boldsymbol{A}$ 中元素 $a_{ij}\ (i,j=1,2,\cdots,n)$ 代数余子式，二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{A_{ij}}{|\boldsymbol{A}|}x_ix_j$.

（1）记 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$，把 $f(\boldsymbol{x})$ 写成矩阵形式，并证明二次型 $f(\boldsymbol{x})$ 的矩阵为 $\boldsymbol{A}^{-1}$；

（2）二次型 $g(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 与 $f(\boldsymbol{x})$ 的规范形是否相同？并说明理由.

解　（1）由题意，二次型的矩阵形式为

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&\cdots&A_{n1}\\A_{12}&A_{22}&\cdots&A_{n2}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\A_{1n}&A_{2n}&\cdots&A_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},$$

由 $\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*$，及 $\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{\mathrm{T}}=\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}$，从而 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 为对称矩阵，因此二次型的矩阵为 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

（2）由于 $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}$，及 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 为对称矩阵，从而 $\boldsymbol{A}^{-1}=\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}$，因此有 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 相似，所以 $g(\boldsymbol{x})$ 与 $f(\boldsymbol{x})$ 的规范形相同.

例 6.5.4　【1999（1，3）】设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 实矩阵，$\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵，矩阵 $\boldsymbol{B}=\lambda\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$，试证：当 $\lambda>0$ 时，矩阵 $\boldsymbol{B}$ 为正定矩阵.

证　因为 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=\lambda\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$，所以 $\boldsymbol{B}$ 为实对称矩阵．对于任意非零的实向量 $\boldsymbol{x}$，有

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\lambda\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}),$$

这里 $\lambda\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}>0$，$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})\geqslant 0$，所以 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}>0$，即矩阵 $\boldsymbol{B}$ 为正定矩阵.

例 6.5.5　【2000（1，3）】设 n 元二次型

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(x_1+a_1x_2)^2+(x_2+a_2x_3)^2+\cdots+(x_{n-1}+a_{n-1}x_n)^2+(x_n+a_nx_1)^2$$

其中 $a_i\ (i=1,2,\cdots,n)$ 为实数，试问：当 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 满足什么条件时，$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为正定二次型.

解　由题意，对任意 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 都有 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\geqslant 0$．并且 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0$ 当且仅当

$$\begin{cases}x_1+a_1x_2=0\\x_2+a_2x_3=0\\\qquad\cdots\\x_{n-1}+a_{n-1}x_n=0\\x_n+a_nx_1=0\end{cases}$$

有解．由于方程组只有零解的充分必要条件为其系数行列式

$$\begin{vmatrix}1&a_1&0&\cdots&0&0\\0&1&a_2&\cdots&0&0\\0&0&1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1&a_{n-1}\\a_n&0&0&\cdots&0&1\end{vmatrix}=1+(-1)^{n+1}a_1a_2\cdots a_n\neq 0,$$

所以当 $a_1a_2\cdots a_n\neq(-1)^n$ 时，对任意的不全为零的 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，有 $x_1+a_1x_2$，$x_2+a_2x_3$，$\cdots$，$x_{n-1}+a_{n-1}x_n$，$x_n+a_nx_1$ 不全为零，得 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)>0$，所以 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为正定二次型.

例 6.5.6　【2005（1，3）】设 $\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{B}\end{pmatrix}$ 为正定矩阵，其中 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 分别为 m 阶、n 阶对称矩阵，$\boldsymbol{C}$ 为 $m\times n$ 矩阵.

（1）计算 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{P}$，其中 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_m & -\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}_n\end{pmatrix}$；

（2）利用（1）的结果判断矩阵 $\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}$ 是否为正定矩阵，并证明你的结论.

解　（1）由题意，

$$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_m & -\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}_n\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{B}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_m & -\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}_n\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_m & \boldsymbol{O}\\ -\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{E}_n\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{B}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_m & -\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}_n\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_m & -\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}\end{pmatrix},$$

（2）$\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}$ 为正定矩阵，这是因为由（1）可知 $\boldsymbol{D}$ 与 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}\end{pmatrix}$ 合同，再由已知 $\boldsymbol{D}$ 为正定矩阵，从而 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}\end{pmatrix}$ 为正定矩阵，因此对任意的 $m+n$ 维非零向量 $\boldsymbol{x}$，均有 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}\end{pmatrix}\boldsymbol{x}>0$. 特别地将 $\boldsymbol{x}$ 的前 m 维分量全取为零，则有对任意的 n 维非零向量 $\boldsymbol{y}$，有 $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C})\boldsymbol{y}>0$，因此 $\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}$ 为正定矩阵.

例 6.5.7　【2013（1，2，3）】设二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=2(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)^2+(b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3)^2,$$

记 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$.

（1）证明：二次型 f 对应的矩阵为 $2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$；

（2）若 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 正交且均为单位向量，证明：f 在正交变换下的标准形为 $2y_1^2+y_2^2$.

（1）**证**　设 $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$，由于

$$f(x_1,x_2,x_3)=2(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)^2+(b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3)^2$$

$$=2\left[(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}\right]+\left[(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}\right]$$

$$=2\left[(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}(a_1,a_2,a_3)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\right]+\left[(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}(b_1,b_2,b_3)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\right]$$

$$=2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{x},$$

所以 f 对应的矩阵为 $2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$．

（2）设 $\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$，因为 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 正交，

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=(2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{\alpha}=2\boldsymbol{\alpha}，\quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}=(2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}，$$

于是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=2$，$\lambda_2=1$．又因为

$$R(\boldsymbol{A})=R(2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})\leqslant R(2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})+R(\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})=2，$$

所以 $R(\boldsymbol{A})=2$，得 $\lambda_3=0$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，故 f 在正交变换下的标准形为 $2y_1^2+y_2^2$．

2013 年考研试题线性代数考题

1.【2013（1，3）】设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 均为 n 阶矩阵，若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{C}$，且 $\boldsymbol{B}$ 可逆，则（　　）.

（A）矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的行向量组与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组等价；

（B）矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的列向量组与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组等价；

（C）矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的行向量组与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的行向量组等价；

（D）矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的列向量组与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组等价.

解　由题意记 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{n\times n}$，$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots\boldsymbol{\alpha}_n)$，$\boldsymbol{C}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots\boldsymbol{\beta}_n)$，由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{C}$ 有

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots\boldsymbol{\alpha}_n)\,(b_{ij})_{n\times n}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots\boldsymbol{\beta}_n),$$

即 $\boldsymbol{A}$ 的列向量可以线性表示 $\boldsymbol{C}$ 的列向量组，$\boldsymbol{B}$ 为系数矩阵．再由 $\boldsymbol{B}$ 可逆，有 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{CB}^{-1}$，类似地有 $\boldsymbol{C}$ 的列向量可以表示 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组，$\boldsymbol{B}^{-1}$ 为系数矩阵．从而两个向量组等价，因此本题选择 B.

2.【2013（1，3）】矩阵 $\begin{pmatrix}1&a&1\\a&b&a\\1&a&1\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&b&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ 相似的充分必要条件为（　　）.

（A）$a=0,b=2$；　　　　（B）$a=0,b$ 为任意常数；

（C）$a=2,b=0$；　　　　（D）$a=2,b$ 为任意常数.

解　由于两个矩阵均为对称矩阵，因此它们相似的充分必要条件为具有相同的特征值，而当 $a=0$ 时，两个矩阵的特征多项式均为 $f(\lambda)=\lambda^3-(2+b)\lambda^3+2b\lambda$，故本题选 B.

3.【2013（1，3）】设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 是 3 阶非零方阵，$|\boldsymbol{A}|$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的行列式，A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式，若 $a_{ij}+A_{ij}=0\ (i,j=1,2,3)$，则 $|\boldsymbol{A}|=$________.

解　由题意 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 为非零方阵，不妨设 $a_{11}\neq 0$，由 $a_{ij}=-A_{ij}\ (i,j=1,2,3)$，

$$|\boldsymbol{A}|=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}=-a_{11}^2-a_{12}^2-a_{13}^2\neq 0,$$

及

$$\boldsymbol{A}^*=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&A_{31}\\A_{12}&A_{22}&A_{32}\\A_{13}&A_{23}&A_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-a_{11}&-a_{21}&-a_{31}\\-a_{12}&-a_{22}&-a_{32}\\-a_{13}&-a_{23}&-a_{33}\end{pmatrix}=-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}},$$

从而 $|\boldsymbol{AA}^*|=|-\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}}|=(-1)^3|\boldsymbol{A}|^2=-|\boldsymbol{A}|^2$，再由 $\boldsymbol{AA}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$，有 $|\boldsymbol{AA}^*|=|\boldsymbol{A}|^3$，故 $|\boldsymbol{A}|=-1$.

4.【2013（1，3）】设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&a\\1&0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&1\\1&b\end{pmatrix}$. 当 a,b 为何值时，存在矩阵 $\boldsymbol{C}$ 使得 $\boldsymbol{AC}-\boldsymbol{CA}=\boldsymbol{B}$，并求所有矩阵 $\boldsymbol{C}$.

解　由题意，设 $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{pmatrix}$，代入 $\boldsymbol{AC}-\boldsymbol{CA}=\boldsymbol{B}$，整理有

$$\begin{pmatrix} -x_2+ax_3 & -ax_1+x_2+ax_4 \\ x_1-x_3-x_4 & x_2-ax_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix},$$

从而有

$$\begin{cases} -x_2+ax_3=0 \\ -ax_1+x_2+ax_4=1 \\ x_1-x_3-x_4=1 \\ x_2-ax_3=b \end{cases},$$

即若矩阵 $\boldsymbol{C}$ 存在，则方程组有解，而

$$(\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & a & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 & a & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -a & 0 & b \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1+a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b \end{array}\right),$$

因此可得 $a=-1, b=0$，并且此时

$$(\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{b}) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

返回方程组为

$$\begin{cases} x_1=1+x_3+x_4 \\ x_2=-x_3 \end{cases},$$

令 $x_3=c_1, x_4=c_2$，则其全部解为

$$\begin{cases} x_1=1+c_1+c_2 \\ x_2=-c_1 \\ x_3=c_1 \\ x_4=c_2 \end{cases},$$

其中 c_1、c_2 为任意实数，且 $\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1+c_1+c_2 & -c_1 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix}$.

5.【2013（1，3）】设二次型

$$f(x_1,x_2,x_3) = 2(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)^2 + (b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3)^2,$$

记

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

（1）证明：二次型 f 对应的矩阵为 $2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$；

（2）若 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 正交且均为单位向量，证明：f 在正交变换下的标准形为 $2y_1^2+y_2^2$.

解 （1）由题意，由矩阵的运算有

$$f(x_1,x_2,x_3)=2(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)^2+(b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3)^2$$

$$=2(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}(a_1,a_2,a_3)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}+(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}(b_1,b_2,b_3)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

$$=(x_1,x_2,x_3)\left(2\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}(a_1,a_2,a_3)+\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}(b_1,b_2,b_3)\right)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix},$$

故二次型 f 对应的矩阵为 $2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$.

（2）由于

$$(2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{\alpha}=2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=2\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})+\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})=2\boldsymbol{\alpha}，$$

$$(2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{\beta}=2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=2\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta})+\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{\beta}，$$

从而 $2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$ 有特征值 $2,1$． 由于

$$R(2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})\leqslant R(2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})+R(\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})=2<3，$$

即 $2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$ 不可逆，其有特征值 0，又因为 $2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$ 为对称矩阵，故 f 在正交变换下的标准形为 $2y_1^2+y_2^2$.

2014 年考研试题线性代数考题

1.【2014（1，3）】行列式$\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix} =$（　　）.

（A）$(ad-bc)^2$；　（B）$-(ad-bc)^2$；　（C）$a^2d^2-b^2c^2$；　（D）$b^2c^2-a^2d^2$.

解　由于

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -(ad-bc)^2,$$

故本题选 B.

2.【2014（1，3）】设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$均为三维向量，则对任意常数$k,l$，向量组$\boldsymbol{\alpha}_1+k\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_2+l\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关是向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关的（　　）.

（A）必要非充分条件；　（B）充分非必要条件；

（C）充分必要条件；　（D）既非充分也非必要条件.

解　若$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关，则由

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\xrightarrow{\text{初等变换}}(\boldsymbol{\alpha}_1+k\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2+l\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3),$$

及初等变换不改变矩阵秩，有$\boldsymbol{\alpha}_1+k\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_2+l\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关，即$\boldsymbol{\alpha}_1+k\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_2+l\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关是向量组线性无关的必要条件．反之不真，如令$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$线性无关，$\boldsymbol{\alpha}_3=0$即可．故本题选 A.

3.【2014（1，3）】设二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-x_2^2+2ax_1x_3+4x_2x_3$的负惯性指数为 1，则$a$的取值范围是_________.

解　由题意，由配方法有

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,x_3) &= x_1^2+2ax_1x_3+(ax_3)^2-x_2^2+4x_2x_3-(ax_3)^2 \\ &= (x_1+ax_3)^2-x_2^2+4x_2x_3-4x_3^2+4x_3^2-(ax_3)^2 \\ &= (x_1+ax_3)^2-4(x_2-2x_3)^2+(4-a^2)x_3^2, \end{aligned}$$

从而$(4-a^2)\geqslant 0$，故a的取值范围是$[-2,2]$.

4.【2014（1，3）】设$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{E}$为 3 阶单位矩阵.

（1）求方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的一个基础解系；（2）求满足$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$的所有矩阵$\boldsymbol{B}$.

解　（1）由矩阵的初等变换有

$$(A\ E)=\left(\begin{array}{cccc|ccc}1&-2&3&-4&1&0&0\\0&1&-1&1&0&1&0\\1&2&0&-3&0&0&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|ccc}1&-2&3&-4&1&0&0\\0&1&-1&1&0&1&0\\0&0&1&-3&-1&-4&1\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{cccc|ccc}1&0&0&1&2&6&-1\\0&1&0&-2&-1&-3&1\\0&0&1&-3&-1&-4&1\end{array}\right),$$

返回分别与 $\boldsymbol{Ax}=0$， $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\varepsilon}_1$， $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\varepsilon}_2$， $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\varepsilon}_3$ 同解的方程组

$$\begin{cases}x_1=-x_4\\x_2=2x_4\\x_3=3x_4\end{cases},\quad \begin{cases}x_1=2-x_4\\x_2=-1+2x_4\\x_3=-1+3x_4\end{cases},\quad \begin{cases}x_1=6-x_4\\x_2=-3+2x_4\\x_3=-4+3x_4\end{cases},\quad \begin{cases}x_1=-1-x_4\\x_2=1+2x_4\\x_3=1+3x_4\end{cases},$$

从而令 $x_4=1$，有 $\boldsymbol{Ax}=0$ 的基础解系为 $\boldsymbol{\xi}=(-1,2,3,1)^{\mathrm T}$.

（2）由（1）可得

$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\varepsilon}_1$ 的通解为 $\boldsymbol{\eta}_1=(2-k_1,-1+2k_1,-1+3k_1,k_1)^{\mathrm T}$， $k_1\in\mathrm{R}$，

$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\varepsilon}_2$ 的通解为 $\boldsymbol{\eta}_2=(6-k_2,-3+2k_2,-4+3k_2,k_2)^{\mathrm T}$， $k_2\in\mathrm{R}$，

$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\varepsilon}_3$ 的通解为 $\boldsymbol{\eta}_3=(-1-k_3,1+2k_3,1+3k_3,k_3)^{\mathrm T}$， $k_3\in\mathrm{R}$，

因此满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$ 的所有矩阵

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2-k_1&6-k_2&-1-k_3\\-1+2k_1&-3+2k_2&1+2k_3\\-1+3k_1&-4+3k_2&1+3k_3\\k_1&k_2&k_3\end{pmatrix},\quad k_1,k_2,k_3\in\mathrm{R}.$$

5.【2014（1，3）】证明 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\1&1&\cdots&1\\\vdots&\vdots&&\vdots\\1&1&\cdots&1\end{pmatrix}$ 与 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&0&\cdots&1\\0&0&\cdots&2\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&n\end{pmatrix}$ 相似.

证　由于

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\lambda^n-n\lambda^{n-1}=\lambda^{n-1}(\lambda-n),$$

故 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 具有相同的特征值 0 $(n-1$重$)$ 及 n . 由于 $\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵，则其必相似于对角矩阵 $\mathrm{diag}(n,0,\cdots,0)$. 对于 $\boldsymbol{B}$，当特征值为 0 时，由于 $\mathrm{r}(0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B})=\mathrm{r}(\boldsymbol{B})=1$，故属于特征值 0 的线性无关的特征向量有 $n-1$ 个，故 $\boldsymbol{B}$ 也能相似于对角矩阵 $\mathrm{diag}(n,0,\cdots,0)$. 由相似的传递性有 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似.

2015 年考研试题线性代数考题

1.【2015（1，3）】设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&a\\1&4&a^2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}1\\d\\d^2\end{pmatrix}$. 若集合 $\Omega=\{1,2\}$，则线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解的充分必要条件为（　　）.

（A）$a\notin\Omega,d\notin\Omega$；　（B）$a\notin\Omega,d\in\Omega$；　（C）$a\in\Omega,d\notin\Omega$；　（D）$a\in\Omega,d\in\Omega$.

解　由于

$$(\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{b})=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&2&a&d\\1&4&a^2&d^2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&a-1&d-1\\0&0&a^2-3a+2&d^2-3d+2\end{pmatrix},$$

$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解 $\Leftrightarrow\begin{cases}a^2-3a+2=0\\d^2-3d+2=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}a=1,\ 2\\d=1,\ 2\end{cases}$，故 D 正确.

2.【2015（1，3）】设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Py}$ 下的标准形为 $2y_1^2+y_2^2-y_3^2$，其中 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)$. 若 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{e}_1,-\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_2)$，则 $f(x_1,x_2,x_3)$ 在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Qy}$ 下的标准形为（　　）.

（A）$2y_1^2-y_2^2+y_3^2$；　　（B）$2y_1^2+y_2^2-y_3^2$；

（C）$2y_1^2-y_2^2-y_3^2$；　　（D）$2y_1^2+y_2^2+y_3^2$.

解　由题题，$2,1,-1$ 为二次型矩阵的三个特征值，再由 $\boldsymbol{P}$ 的构造方式有 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 为分别属于三个特征值的特征向量，从而若令 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{e}_1,-\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_2)$，则在变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Qy}$ 下的标准形为 $2y_1^2-y_2^2+y_3^2$，故本题选 A.

3.【2015（1）】n 阶行列式 $\begin{vmatrix}2&0&\cdots&0&2\\-1&2&\cdots&0&2\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&2&2\\0&0&\cdots&-1&2\end{vmatrix}=$________.

解　原式 $=\begin{vmatrix}2&0&0&\cdots&2\\0&2&0&\cdots&1+2\\0&0&2&\cdots&\frac{1}{2}+1+2\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&\frac{1}{2^{n-2}}+\cdots+1+2\end{vmatrix}=2^{n-1}\left(\frac{1}{2^{n-2}}+\cdots+1+2\right)=2^{n+1}-2$.

4.【2015（3）】设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $2,-2,1$，$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$，其中 $\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位矩阵，则行列式 $|\boldsymbol{B}|=$________.

解 由题意 $\boldsymbol{B}$ 矩阵的 3 个特征值为 $2^2-2+1=3$，$(-2)^2-(-2)+1=7$，$1^2-1+1=1$，故 $|\boldsymbol{B}|=3\times7\times1=21$.

5.【2015（1）】设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是 $\boldsymbol{R}^3$ 的一个基，$\boldsymbol{\beta}_1=2\boldsymbol{\alpha}_1+2k\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\beta}_2=2\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+(k+1)\boldsymbol{\alpha}_3$.

（1）证明向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 是 $\boldsymbol{R}^3$ 的一个基；

（2）k 为何值时，存在非零向量 $\boldsymbol{\xi}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 与基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 下的坐标相同，并求所有的 $\boldsymbol{\xi}$.

解 （1）由题意

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}2&0&1\\0&2&0\\2k&0&k+1\end{pmatrix},$$

而 $\begin{vmatrix}2&0&1\\0&2&0\\2k&0&k+1\end{vmatrix}=4\neq0$，因此 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 等价，故向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 是 $\boldsymbol{R}^3$ 的一个基.

（2）设

$$\boldsymbol{\xi}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix},$$

因此

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}2&0&1\\0&2&0\\2k&0&k+1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix},$$

即

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_3)\left(\boldsymbol{E}-\begin{pmatrix}2&0&1\\0&2&0\\2k&0&k+1\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\boldsymbol{0},$$

因此

$$\left(\boldsymbol{E}-\begin{pmatrix}2&0&1\\0&2&0\\2k&0&k+1\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\boldsymbol{0}.$$

对上述方程组的系数矩阵进行初等变换，

$$\boldsymbol{E}-\begin{pmatrix}2&0&1\\0&2&0\\2k&0&k+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0&-1\\0&-1&0\\-2k&0&-k\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&k\end{pmatrix},$$

因此 $k=0$ 时，存在非零向量 $\boldsymbol{\xi}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 与基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 下的坐标相同．此时，

$$\boldsymbol{E}-\begin{pmatrix}2&0&1\\0&2&0\\2k&0&k+1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

即

$$\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\mathbf{0},$$

方程组的解为

$$\begin{cases}x_1=-c\\x_2=0\\x_3=c\end{cases},$$

因此$\boldsymbol{\xi}=-c\boldsymbol{\alpha}_1+c\boldsymbol{\alpha}_3$，其中$c$为任意实数.

6.【2015（3）】设矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a&1&0\\1&a&-1\\0&1&a\end{pmatrix}$，且$\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{O}$.

（1）求a的值;

（2）若矩阵$\boldsymbol{X}$满足$\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}$，其中$\boldsymbol{E}$为3阶单位矩阵，求$\boldsymbol{X}$.

解　（1）因为$\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{O}$，有$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}a&1&0\\1&a&-1\\0&1&a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&1&0\\1-a^2&a&-1\\-a&1&a\end{vmatrix}=a^3=0$，解得$a=0$.

（2）由已知$\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}$，整理有

$$\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}^2)=\boldsymbol{E},$$

从而

$$\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^2)^{-1}=(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A})^{-1},$$

再由

$$(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{E})=\left(\begin{array}{ccc|ccc}0&-1&1&1&0&0\\-1&1&1&0&1&0\\-1&-1&2&0&0&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&3&1&-2\\0&1&0&1&1&-1\\0&0&1&2&1&-1\end{array}\right),$$

所以

$$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}3&1&-2\\1&1&-1\\2&1&-1\end{pmatrix}.$$

7.【2015（1，3）】设矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&2&-3\\-1&3&-3\\1&-2&a\end{pmatrix}$相似于矩阵$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&-2&0\\0&b&0\\0&3&1\end{pmatrix}$.

（1）求a,b的值;　　（2）求可逆矩阵$\boldsymbol{P}$，使$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$为对角矩阵.

解 （1）由于相似矩阵具有相同的迹、相同的行列式，从而有

$$\begin{cases} \mathrm{tr}(\boldsymbol{A})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{B}) \\ |\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}| \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a-b=-1 \\ 2a-b=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=4 \\ b=5 \end{cases}.$$

（2）由（1）有

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|=\begin{vmatrix} \lambda-1 & 2 & 0 \\ 0 & \lambda-5 & 0 \\ 0 & 3 & \lambda-1 \end{vmatrix}=(\lambda-5)(\lambda-1)^2=0,$$

故 $\boldsymbol{B}$ 有特征值 $\lambda_1=1\ (2\text{重})$，$\lambda_2=5$，从而 $\boldsymbol{A}$ 有特征值 $\lambda_1=1\ (2\text{重})$，$\lambda_2=5$.

当 $\lambda_1=1$ 时，代入 $(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=0$，由

$$\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

有属于 1 的线性无关的特征向量为 $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

当 $\lambda_1=5$ 时，代入 $(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=0$，由

$$5\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 5 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

有属于 5 的线性无关的特征向量为 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

令 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 5 \end{pmatrix}$.

2016 年考研试题线性代数考题

1.【2016（1，3）】设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是可逆矩阵，且 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，则下列结论错误的是（　　）.

（A）$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 相似；　　（B）$\boldsymbol{A}^{-1}$ 与 $\boldsymbol{B}^{-1}$ 相似；

（C）$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 相似；　　（D）$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{-1}$ 与 $\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^{-1}$ 相似.

解　利用排除法. 由 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似可知，存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$，则

$$(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\Rightarrow \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}})^{-1}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\Rightarrow \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\sim\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}},$$

即 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 相似，故（A）不选；又因为

$$(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\Rightarrow \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}^{-1}\Rightarrow \boldsymbol{A}^{-1}\sim\boldsymbol{B}^{-1},$$

即 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 与 $\boldsymbol{B}^{-1}$ 相似，故（B）不选；又因为

$$\boldsymbol{P}^{-1}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{-1})\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^{-1}\Rightarrow \boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{-1}\sim\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^{-1},$$

即 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{-1}$ 与 $\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^{-1}$ 相似，故（D）不选，从而（C）为正确选项.

2.【2016（1）】设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$，则 $f(x_1,x_2,x_3)=2$ 在空间直角坐标下表示的二次曲面为（　　）.

（A）单叶双曲面；　　（B）双叶双曲面；　　（C）椭球面；　　（D）柱面.

解　二次型对应的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$，由于

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-2&-2\\-2&\lambda-1&-2\\-2&-2&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda+1)^2(\lambda-5),$$

从而特征根为 $\lambda_1=\lambda_2=-1$，$\lambda_3=5$，故二次型的正惯性指数为 1，负惯性指数为 2，从而二次型表示双叶双曲面，正确选项为 B.

3.【2016（3）】设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=a(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+2x_1x_2+2x_2x_3+2x_1x_3$ 的正负惯性指数分别为 $1,2$，则（　　）.

（A）$a>1$；　　（B）$a<-2$；　　（C）$-2<a<1$；　　（C）$a=1$ 或 $a=-2$.

解　可以利用特殊值法. 当 $a=0$ 时，$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_2+2x_2x_3+2x_1x_3$，其矩阵为 $\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$，由此计算出特征值为 $2,-1,-1$，满足题目已知条件，故 $a=0$ 成立，因此 C 为正确选项.

4.【2016（1，3）】行列式 $\begin{vmatrix}\lambda&-1&0&0\\0&\lambda&-1&0\\0&0&\lambda&-1\\4&3&2&\lambda+1\end{vmatrix}=$________.

解 根据行列式的性质，有

$$原式=\lambda\begin{vmatrix}\lambda & -1 & 0\\ 0 & \lambda & -1\\ 3 & 2 & \lambda+1\end{vmatrix}+4\times(-1)^{4+1}\begin{vmatrix}-1 & 0 & 0\\ \lambda & -1 & 0\\ 0 & \lambda & -1\end{vmatrix}=\lambda^4+\lambda^3+2\lambda^2+3\lambda+4.$$

5.【2016（1）】设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ 2 & a & 1\\ -1 & 1 & a\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 1 & a\\ -a-1 & -2\end{pmatrix}$，当 a 为何值时，方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 无解，有无穷多解？在有解时，求此方程的解.

解 由于方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 有唯一解 $\Leftrightarrow|\boldsymbol{A}|\neq 0$，并且

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1 & -1 & -1\\ 2 & a & 1\\ -1 & 1 & a\end{vmatrix}=(a+2)(a-1),$$

从而当 $a\neq 1$ 且 $a\neq -2$ 时，$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 有唯一解

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & 2+\dfrac{a-4}{a+2}\\ 0 & \dfrac{a-4}{a+2}\\ -1 & 0\end{pmatrix}.$$

当 $a=-2$ 时，由于

$$(\boldsymbol{A}\ \ \boldsymbol{B})=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1 & 2 & 2\\ 2 & -2 & 1 & 1 & -2\\ -1 & 1 & -2 & 1 & -2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -1 & -1 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

故 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 无解；当 $a=1$ 时，

$$(\boldsymbol{A}\ \ \boldsymbol{B})=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 1 & -2 & -2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

此时 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 有无穷多解，并且方程组的通解为

$$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1-k_1 & -1-k_2\\ k_1 & k_2\end{pmatrix}\quad（k_1,k_2 为任意常数）.$$

6.【2016（3）】设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1-a\\ 1 & 0 & a\\ a+1 & 1 & a+1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 2a-2\end{pmatrix}$，且方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 无解，

（1）求 a 的值；（2）求方程组 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}$ 的通解.

解 （1）由方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 无解，可知 $R(\boldsymbol{A})\neq R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta})$，故

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1-a\\ 1 & 0 & a\\ a+1 & 1 & a+1\end{vmatrix}=0,$$

解得 $a=0$ 或 $a=2$．再由当 $a=0$ 时 $R(\boldsymbol{A})\neq R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta})$，当 $a=2$ 时 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta})$，故 $a=0$．

（2）当 $a=0$ 时，$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3 & 2 & 2\\ 2 & 2 & 2\\ 2 & 2 & 2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}-1\\ -2\\ -2\end{pmatrix}$，故

$$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A},\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta})=\left(\begin{array}{ccc:c}3 & 2 & 2 & -1\\ 2 & 2 & 2 & -2\\ 2 & 2 & 2 & -2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right),$$

因此，方程组 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}$ 的通解为

$$\boldsymbol{x}=k\begin{pmatrix}0\\ -1\\ 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\ -2\\ 0\end{pmatrix}\qquad（k\text{ 为任意实数}）.$$

7.【2016（1，3）】已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & -1 & 1\\ 2 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$．

（1）求 $\boldsymbol{A}^{99}$；

（2）设3阶矩阵 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，满足 $\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$，记 $\boldsymbol{B}^{100}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$，将 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 分别表示为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的线性组合.

解（1）由 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$，解得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=0,\lambda_2=-1,\lambda_3=-2$，再代入方程 $(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=0$ 求出对应的特征向量依次为

$$\boldsymbol{\gamma}_1=\begin{pmatrix}3\\ 2\\ 2\end{pmatrix};\quad \boldsymbol{\gamma}_2=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 0\end{pmatrix};\quad \boldsymbol{\gamma}_3=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 0\end{pmatrix},$$

令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3)=\begin{pmatrix}3 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 2\\ 2 & 0 & 0\end{pmatrix}$，则有 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}0 & & \\ & -1 & \\ & & -2\end{pmatrix}$，整理可得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1}$，

从而

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^{99}&=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}^{99}\boldsymbol{P}^{-1}\\ &=\begin{pmatrix}3 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 2\\ 2 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & & \\ & -1 & \\ & & -2^{99}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0 & \frac{1}{2}\\ 2 & -1 & -2\\ -1 & 1 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$=\begin{pmatrix} -2+2^{99} & 1-2^{99} & 2-2^{98} \\ -2+2^{100} & 1-2^{100} & 2-2^{99} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

（2）由 $\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{BA}$ ，易得 $\boldsymbol{B}^{100}=\boldsymbol{BA}^{99}$ ，从而有

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{A}^{99}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix} -2+2^{99} & 1-2^{99} & 2-2^{98} \\ -2+2^{100} & 1-2^{100} & 2-2^{99} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

因此

$\boldsymbol{\beta}_1=(-2+2^{99})\boldsymbol{\alpha}_1+(-2+2^{100})\boldsymbol{\alpha}_2$ ， $\boldsymbol{\beta}_2=(1-2^{99})\boldsymbol{\alpha}_1+(1-2^{100})\boldsymbol{\alpha}_2$ ， $\boldsymbol{\beta}_3=(2-2^{98})\boldsymbol{\alpha}_1+(2-2^{99})\boldsymbol{\alpha}_2$.

2017 年考研试题线性代数考题

1.【2017（1，3）】设 $\boldsymbol{\alpha}$ 为 n 维单位列向量， $\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵，则（　　）.

（A） $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}$ 不可逆；　　（B） $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}$ 不可逆；

（C） $\boldsymbol{E}+2\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}$ 不可逆；　　（D） $\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}$ 不可逆.

解　由题意，$\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}$ 是秩为 1 的 n 阶对称矩阵，再由 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})=1$，有 $\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}$ 的特征值为 $0,1$，并且 0 为 $n-1$ 重特征值．进而矩阵 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}$ 有特征值 0，故 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}$ 不可逆．本题选 A.

2.【2017（1，3）】已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&1\\0&0&1\end{pmatrix}$， $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$， $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$，则下列结论正确的是（　　）.

（A） $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 相似， $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 相似；　　（B） $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 相似， $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 不相似；

（C） $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 不相似， $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 相似；　　（D） $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 不相似， $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 不相似.

解　由题意，由于

$$\left|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\right|=\left|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}\right|=(\lambda-1)(\lambda-2)^2=0,$$

可得 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的特征值均为 $2,2,1$．对于特征值 2，由于 $R(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=1$，有 $(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=0$ 的基础解系中有两个向量，故 $\boldsymbol{A}$ 与对角阵 $\boldsymbol{C}$ 相似；再由 $R(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B})=2$，有 $(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}=0$ 的基础解系中只有一个向量，所以 $\boldsymbol{B}$ 不能与 $\boldsymbol{C}$ 相似．本题选 B.

3.【2017（1，3）】设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&2\\0&1&1\end{pmatrix}$， $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 为线性无关的 3 维列向量组，则向量组 $\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\boldsymbol{A\alpha}_3$ 的秩为________.

解　由题意，由三维列向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，有矩阵 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$ 可逆，再由

$$(\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\boldsymbol{A\alpha}_3)=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$$

可知， $R(\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\boldsymbol{A\alpha}_3)=R(\boldsymbol{A})$．由矩阵的初等变换

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&2\\0&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix},$$

得 $R(\boldsymbol{A})=2$，故 $\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\boldsymbol{A\alpha}_3$ 的秩为 2.

4.【2017（2）】设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4&1&-2\\1&2&a\\3&1&-1\end{pmatrix}$ 的一个特征向量为 $\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$，则 $a=$________.

解　由题意，并结合特征值与特征向量的定义有

$$\begin{pmatrix}4&1&-2\\1&2&a\\3&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$$

可解得 $a=-1$.

5.【2017（1，2，3）】设3阶矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$ 有3个不同的特征值，且 $\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$.

（1）证明 $R(\boldsymbol{A})=2$；（2）若 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，求方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解.

（1）**证** 由题意，由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关，有 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\leqslant 2$，从而矩阵 $\boldsymbol{A}$ 不可逆，故 $\boldsymbol{A}$ 有特征值0 . 设 $\boldsymbol{A}$ 的3个不同的特征值为 $a,b,0$，则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\mathrm{diag}(a,b,0)$ 相似，所以 $R(\boldsymbol{A})=2$.

（2）**解** 因为 $R(\boldsymbol{A})=2$，所以 $\boldsymbol{Ax}=0$ 的基础解系中含有一个解向量. 由 $\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$，即 $\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3=0$，可得 $\boldsymbol{Ax}=0$ 的基础解系为 $\boldsymbol{\xi}=(1,2,-1)^{\mathrm{T}}$. 再由 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，可得 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的特解为 $\boldsymbol{\eta}=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$. 故 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解为 $\boldsymbol{\eta}+k\boldsymbol{\xi}$（$k$ 为任意实数）.

6.【2017（1，2，3）】设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2-x_2^2+ax_3^2+2x_1x_2-8x_1x_3+2x_2x_3$ 在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Qy}$ 下的标准形为 $\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2$. 求 a 的值及一个正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$.

解 设二次型 f 的矩阵为 $\boldsymbol{A}$，由题意有 $R(\boldsymbol{A})<3$，由于

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&1&-4\\1&-1&1\\-4&1&a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&-2\\0&0&a-2\end{pmatrix},$$

故 $a=2$. 此时有

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-1&4\\-1&\lambda+1&-1\\4&-1&\lambda-2\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-6)(\lambda+3),$$

解得 $\boldsymbol{A}$ 有特征值 $6,-3,0$. 当 $\lambda=6$ 时，由 $(6\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=0$ 解得属于0的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$，单位化得 $\xi_1=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$；当 $\lambda=-3$ 时，由 $(-3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=0$ 解得属于 -3 的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$，单位化得 $\xi_2=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$；当 $\lambda=0$ 时，由 $(0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=0$ 解得属于0的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$，单位化得 $\xi_3=\dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$；令 $\boldsymbol{Q}=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$，则有二次型 f 在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Qy}$ 下的标准形为 $6y_1^2-3y_2^2$，故

$$\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}&\dfrac{1}{\sqrt{3}}&\dfrac{1}{\sqrt{6}}\\0&-\dfrac{1}{\sqrt{3}}&\dfrac{2}{\sqrt{6}}\\\dfrac{1}{\sqrt{2}}&\dfrac{1}{\sqrt{3}}&\dfrac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}.$$

参 考 文 献

[1] Larry Smith, Linear Algebra, Springer-Verlag: New York,1978.

[2] 王萼芳，石生明. 高等代数（第 3 版）. 北京：高等教育出版社，2003.

[3] Gilbert Strang. Introduction To Linear Algebra(Fourth Edition), Wellesley-Cambridge Press,2009.

[4] 吴传生. 经济数学——线性代数（第 2 版）. 北京：高等教育出版社，2009.

[5] 吴赣昌. 线性代数（第 4 版，理工类）. 北京：中国人民大学出版社，2011.

[6] 吴赣昌. 线性代数（第 4 版，经管类）. 北京：中国人民大学出版社，2011.

[7] 胡显佑. 线性代数（第 2 版）. 北京：高等教育出版社，2012.

[8] 赵树嫄. 线性代数（第 4 版）. 北京：中国人民大学出版社，2013.

[9] 上海交通大学数学系. 线性代数（第 3 版）. 北京：科学出版社，2014.

[10] 同济大学数学系. 工程数学线性代数（第 6 版）. 北京：高等教育出版社，2014.

[11] 张天德，宫献军. 线性代数习题精选精解. 济南：山东科学技术出版社，2014.

[12] Nicholas Loehr. Advanced Linear Algebra,CRC Press: Boca Raton,2014.

[13] Sheldon Axler. Linear Algebra Done Right(Third edition), Springer:San Francisco,2014.

[14] 刘强，孙阳，孙激流. 线性代数同步练习与模拟试题. 北京：清华大学出版社，2015.

[15] 教育部考试中心. 全国硕士研究生入学统一考试数学试题，1990-2017.